NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for lærerutdanning

Eksamensoppgave i
LGU52015 MATEMATIKK 2 (5-10), EMNE 2

Sensurveiledning

Faglig kontakt under eksamen: Kari Hovstad[a], Marius Lie Winger[b]

Tlf: [a] 909 81 343 , [b] 404 83 797

Eksamensdato: 16. mai 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 15:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator tillatt. Ett A4-ark med egne notater.

Annen informasjon:
Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Den endelige karakteren vil bygge på en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 12

Antall sider vedlegg: 1

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Orginalen er:

1-sidig ☒ **2-sidig** ☐

sort/hvit ☐ **farger** ☒

skal ha flervalgskjema ☐

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

Jones, Langrall, Thornton, og Mogill (1997) presenterte et rammeverk for å kartlegge elevers tenking knyttet til sannsynlighet, spesielt innen temaene: “utfallsrom”, “sannsynligheten for en hendelse”, “sammenlikning av sannsynligheter”, og “betingede sannsynligheter”.

a) I rammeverket beskrives fire nivåer som skiller elevers tenking knyttet til sannsynlighet. Gi en generell beskrivelse av disse nivåene.

Sensurveiledning

Nivå1: Subjektiv tenking Nivå 2: Overgang mellom subjektiv og naiv kvantitativ tenking Nivå 3: Uformell kvantitativ tenking Nivå 4: Kan føre kvantitative argument △

b) Gi en mer detaljert beskrivelse av disse fire nivåene for temaet ”utfallsrom”. For hvert nivå, illustrer med et konkret eksempel.

Sensurveiledning

Studenten kan gjengi forklaringen på s.111 i artikkelen, og illustrere med konkret eksempel for hvert nivå.

Eksempel for nivå 2: Eleven kan notere utfallene for en-stegs eksperiment. Eleven klarer noen ganger å notere utfallene for to-stegs eksperiment ved å bruke begrensede og usystematiske strategier. En elev på dette nivået vil, for eksempel, kunne notere utfallsrommet for et terningkast. I et eksperiment med to terningkast, derimot, vil eleven (ofte) notere mulige utfall på en usystematisk måte (f.eks 1-2, 3-4, 5-6, 1-6, 4-3, ...), og dermed ikke klare å fylle hele utfallsrommet. △

[Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children’s thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 101-125.]

Oppgave 2
To sentrale begrep i kombinatorikk er *permutasjon* og *kombinasjon*.

a) Gjør rede for disse begrepene og gi eksempel på begge.

Sensurveiledning

Man kan ta utgangspunkt i en urnemodell. En kombinasjon svarer til et uordnet utvalg (uten tilbakelegging) og en permutasjon svarer til et ordnet utvalg (uten tilbakelegging). Som et eksempel kan en tenke at man har en urne med fire løpere som kan velges til å løpe en stafett. En *kombinasjon* av størrelse 3 svarer til å velge ut tre løpere som skal løpe stafetten (uavhengig av etappe. En *permutasjon* svarer til å velge tre løpere og hvilken etappe hver av de skal løpe. △

b) Forklar med egne ord hva *multiplikasjonsprinsippet* (i kombinatorikk) innebærer og gi et forklarende eksempel på det.

Sensurveiledning

Det totale antall kombinasjoner i en serie uavhengige valg fås ved å multiplisere antall muligheter i de enkelte delvalgene. Dersom man har to forskjellige overdeler, tre bukser og fire forskjellige par sko, så kan man sette sammen $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ forskjellige antrekk. △

Formelen for antall mulige måter å gjøre et uordnet utvalg av størrelse k av n er gitt som:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

c) Gi et argument (bevis) for formelens gyldighet.

Sensurveiledning

La N være antallet uordnede utvalg uten tilbakelegging (kombinasjoner) av størrelse k på n objekter. Gitt en kombinasjon av størrelse k, kan denne arrangeres på $k!$ mulige måter (ordnet utvalg uten tilbakelegging, dvs permutasjon). Sagt på en annen måte, en hver kombinasjon av størrelse k gir opphav til $k!$ permutasjoner. Dette betyr at vi har følgende sammenheng:

$$N \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ved å dele på $k!$ får man uttrykket:

$$N = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

△

Oppgave 3

Tre elever fikk i oppgave å fordele (identiske) drops seg i mellom. Kravet var at alle elevene skulle få minst ett drops hver.

a) Dersom elevene får utdelt seks drops til sammen, vis at det er 10 mulige måter for elevene å fordele dropsene seg i mellom.

Sensurveiledning

Viser systematisk eller ved utregning △

b) Vis at elevene kan fordele åtte drops på 21 forskjellige måter.

Sensurveiledning

Vi kan starte med å se på hvor mange måter 8 kan skrives som en sum av nøyaktig tre positive heltall (partisjon). For hver av disse partisjonene kan vi se på hvor mange måter de kan arrangeres i forskjellige rekkefølger.

Partisjon	Antall permutasjoner
6+1+1	3
5+2+1	6
4+2+2	3
4+3+1	6
3+3+2	3

Merk at partisjonene med to like tall har kun to permutasjoner da det ikke er mulige å skille på fordelingene om elevene med likt antall drops skulle bytte seg i mellom. Vi finner svaret på antallet måter eleven kan fordele dropsene seg i mellom ved å summere antall permutasjoner, dvs $3+6+3+6+3 = 21$.

△

Oppgave 4

Et binomisk forsøk er et type eksperiment som består av n like delforsøk.

a) Hvilke tre kriterier må disse delforsøkene tilfredsstille?

Sensurveiledning

1. De n delførsøkene er uavhengige av hverandre.

2. Det er to utfall: Suksess og ikke-suksess.

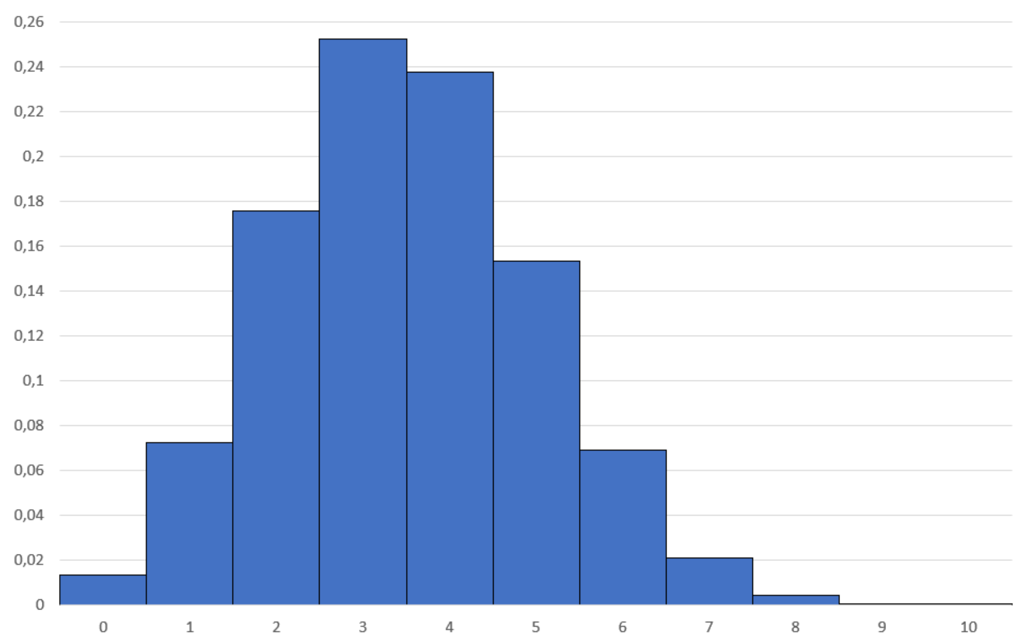
3. Sannsynligheten for suksess er lik i hvert delforsøk. △

b) Gi to eksempler på binomiske forsøk. Hva er p, sannsynligheten for suksess, i disse to eksemplene?

Sensurveiledning

Her forventes det to eksempler som tilfredsstiller kriteriene over. Mulige eksempler: Myntkast, terningkast (avhengig av hvordan man definerer suksess), etc. △

Si nå at $n = 10$, at sannsynligheten for suksess er $p = 0{,}35$ og at X er antall suksesser i løpet av de 10 delforsøkene. Følgende figur viser fordelingen til X:



c) Gi et uttrykk for $P(X \leq 3)$ og gi en verdi for denne. Du kan bruke verdiene fra figuren fritt til å gi en tilnærmet verdi for $P(X \leq 3)$. Hva blir $P(X > 3)$?

Sensurveiledning

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &\approx 0,015 + 0,07 + 0,178 + 0,275 = 0,538 \end{aligned}$$

hvor verdiene er lest av. Den eksakte verdien er nærmere 0,5138. Siden $P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3)$ så får man da $P(X > 3) \approx 0,462$ eller (eksakt) nærmere 0,486 △

I resten av oppgaven er $n = 256$ og $p = 0{,}5$. Vi ser på $P(120 < X < 144)$, altså sannsynligheten for at man får mellom 121 og 143 suksesser i løpet av de 264 delforsøkene. For å regne ut dette må man vanligvis legge sammen 22 ledd. Heldigvis kan man tilnærme den binomiske fordelingen X med en normalfordeling Y som har gjennomsnitt $\mu = 128$ og varians $\sigma^2 = 64$.

d) Forklar hvor verdiene for μ og σ^2 kommer fra. Regn så ut $P(120 < Y < 144)$.

Sensurveiledning

Siden X er en binomisk fordel så vet vi at $E[X] = n \cdot p = 128$ og $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 64$. Dette gir opphav til gjennomsnittet og variansen for normalfordelingen Y.

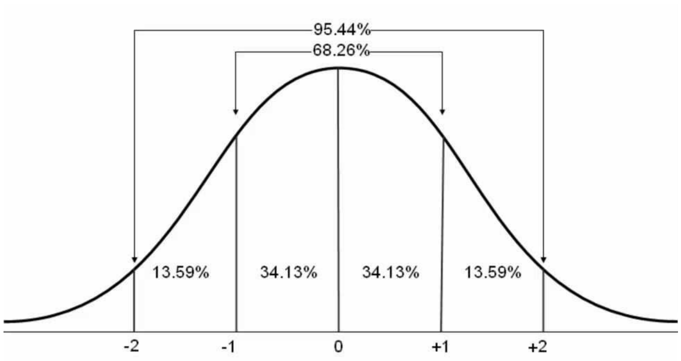
$$\begin{aligned} P(120 < Y < 144) &= P\left(\frac{120 - 128}{8} < \frac{Y - 128}{8} < \frac{144 - 128}{8}\right) \\ &= P(-1 < Z < 2) \\ &= P(Z < 2) - P(Z < -1) \\ &= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1)) \\ &= 0{,}9772 - (1 - 0,8413) = 0,8185 \end{aligned}$$

△

e) Hvordan kan du bruke figuren under til å regne ut $P(120 < Y < 144)$?

Sensurveiledning

Legg merke til at 120 er nøyaktig ett standardavvik under gjennomsnittet og at 144 er nøyaktig to standardavvik over gjennomsnittet. Det tilsvarer $34,13\% + 34,13\% + 13,59\% = 81,85\%$ dersom vi leser av figuren. △



Oppgave 5

Du har bestemt deg for å flytte sammen med en venn og er derfor på utkikk etter en treromsleilighet i Trondheims-området. Du lurer på hva som er en god leiepris for en slik leilighet og har derfor gått inn på finn.no og valgt 10 tilfeldige treromsleiligheter og skrevet ned leieprisen på disse:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8 900	14 500	12 600	9 000	12 000	10 500	12 500	10 800	11 000	8 500

a) Bruk dette utvalget til å finne et forventningsrett punktestimat $\hat{\mu}$ for populasjonsgjennomsnittet μ og et forventningsrett punktestimat $\hat{\sigma}^2$ for populasjonsvariansen σ^2.

Sensurveiledning

Gjennomsnittet er en forventningsrett estimator, så:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{10}(8900 + 14500 + 12600 + \cdots + 11000 + 8500) = 11030$$

En forventningsrett estimator for variansen er:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{\mu})^2$$

hvor x_k her er leieprisene. Regner man ut dette får man:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{9}\left((8900-11030)^2 + (14500-11030)^2 + \cdots + (8500-11030)^2\right) \\ &= \frac{33001000}{9} \approx 3666777.78\end{aligned}$$

△

b) Forklar hva variansen σ^2 beskriver. Hvorfor bruker man standardavviket σ når man sammenligner med gjennomsnittet μ?

Sensurveiledning

Variansen beskriver forventet spredning fra gjennomsnittet i annen. Standardavviket er kvadratroten av variansen og har derfor samme enhet som gjennomsnittet som gjør at man kan sammenligne disse størrelsene. △

Du husker tilbake til forelesningene om estimering at man helst bør ha litt mer enn 10 observasjoner for å kunne trekke en god konklusjon, så du samler inn flere leiepriser. Til slutt ender du opp med 36 leiepriser og med $\hat{\mu} = 12\,043$ og $\hat{\sigma}^2 = 3\,074\,241$.

c) Forklar hvordan man kommer frem til at 95%-konfidensintervallet for μ basert på utvalget er $[11\,470, 12\,616]$, rundet av til nærmeste krone.

Sensurveiledning

For å få nøyaktig 95% av verdiene rundt gjennomsnittet må man gå 1.96 standardavvik i hver retning. Siden vi ser på gjennomsnittsprisen $\overline{X} = \hat{\mu}$ av $n = 36$ leiligheter sier sentralgrenseteoremet oss at $\overline{X}$ er normalfordelt med gjennomsnitt lik $\hat{\mu} = 12043$ og standardavvik $\hat{\sigma}/6 = \sqrt{3074241}/6 \approx 292,225$. Det betyr at et 95%-konfidensintervall er gitt ved:

$$\begin{aligned}&\left[\hat{\mu} - 1.96 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{6}, \hat{\mu} + 1.96 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{6}\right] \\ =&\,[12043 - 1.96 \cdot 292,225, 12043 + 1.96 \cdot 292,225] \\ \approx&\,[11470, 12616]\end{aligned}$$

△

d) Din venn ser på intervallet og påstår at dette betyr at 95% av leieprisene for en treromsleilighet vil ligge innenfor dette intervallet. Forklar hvorfor vennen din tar feil og hva intervallet virkelig betyr.

Sensurveiledning

Dette konfidensintervallet sier noe om *gjennomsnittsprisen* til 36 leiligheter. Prisene på hver enkelt leilighet kan fint ligge et godt stykke unna disse verdiene! Det intervallet sier er at dersom vi gjør denne prosessen (samle inn prisen for 36 forskjellige leiligheter, regne ut gjennomsnittet, standardavvik og tilhørende konfidensintervall) vil vi i 95% av tilfellene sitte igjen med et intervall som inneholder den *ekte* gjennomsnittsprisen for leiligheter. △

Oppgave 6

Datadetektivens syklus er en modell som kan brukes for å beskrive gjennomføringen av en statistisk undersøkelse.

a) Beskriv kort de ulike trinnene i datadetektivens syklus.

Sensurveiledning

Problem - forstå og definere et problem som kan undersøkes vha. statistikk.
Plan - planlegge de neste trinnene i syklusen. Pilotundersøkelse kan gjøres.
Data - lokalisere og samle inn data. Rense data ved behov.
Analyse - utforsking av data, bearbeide data, formulere hypoteser.
Konklusjon - trekke konklusjon ut ifra analysen, eller omformulere problemet ved behov. Nye ideer til nye undersøkelser. Kommunisere resultat. △

En 6.-klasse har fått i oppgave å finne et problem de ønsker å svare på ved hjelp av statistikk. Under følger et utdrag av en samtale som utspiller seg mellom elevene Mali, Jonas, Kristine og Iver, som skal samarbeide.

b) Forklar hvordan de ulike trinnene i datadetektivens syklus kommer til syne i elevenes samtale og arbeid.

MALI: Vi kan undersøke været!

JONAS: Vi må vel være litt tydeligere enn det, på hva vi mener.

MALI: Ja, jeg tenkte på temperaturen da.

JONAS: Hvordan temperaturen endrer seg på en uke?

KRISTINE: Eller gjennomsnittstemperaturen i en uke?

IVER: Vi kan jo finne ut andre ting enn gjennomsnittstemperaturen, også.

MALI: Jeg har lyst til å undersøke endringen, så kanskje vi kan spå været i uka etter!

JONAS: Hvordan skal vi kunne spå det?

MALI: Jo, hvis temperaturen stiger eller synker i hele denne uka, vil det kanskje fortsette slik neste uke også?

IVER: Ok, da sier vi det. Hvordan skal vi finne ut hvordan temperaturen endrer seg da?

MALI: Jeg tenkte vi kunne måle den hele denne uka.

JONAS: Skal vi måle hele tiden? Hvordan skal vi få registrert det?

MALI: Nei, det blir kanskje vanskelig.

KRISTINE: Hva om vi måler en gang om dagen da?

JONAS: Men da må vi passe på at vi gjør det på samme tid og sted hver dag.

KRISTINE: Ja, hva om vi måler her på skolen, kl. 12.00 hver dag?

JONAS: Ja, det synes jeg høres lurt ut.

De neste syv dagene leser gruppa av et digitalt termometer kl 12.00, og noterer følgende tabell:

Dag	Temperatur i grader celsius
Mandag	8
Tirsdag	12
Onsdag	11
Torsdag	13
Fredag	12
Lørdag	12
Søndag	12

Mandagen etter fortsetter arbeidet med undersøkelsen.

MALI: Nå blir det spennende å se hvordan været blir denne uka!

JONAS: Det har holdt seg stabilt de siste dagene, ser jeg.

KRISTINE: Ja, 12 grader i tre dager!

MALI: Jeg tror temperaturen blir 12 grader i hele denne uka!

IVER: Men det var jo 12 grader på tirsdag, men så ble det 11 på onsdag og 13 på torsdag. Jeg tror nok ikke vi kan stole på at det blir 12 grader videre.

MALI: Så hva har vi egentlig funnet ut da, hvis vi ikke kan bruke målingene våre til å si noe om det som skjer senere?

KRISTINE: Vi har jo sett på utviklinga i forrige uke, men kanskje vi må lage et annet spørsmål vi kan svare på med undersøkelsen vår.

MALI: Det var litt dumt, men jeg tror du har rett.

Sensurveiledning

I utsagn 1.-7. arbeider elevene med å formulere et *problem* de kan undersøke. I utsagn 8.-17. legger elevene en *plan* for hvordan de kan samle inn data og bruke disse til å finne ut hvordan været blir etter uka de gjør undersøkelsen. Her avgrenser de undersøkelsen til en uke, og bestemmer seg for å måle temperaturen på samme tid og sted hver dag i denne perioden.
I utsagn 18.-22. samler elevene inn *data* og jobber med en *analyse* av disse. Her lager de en tabell for å strukturere dataene, og prøver å formulere en hypotese. Til slutt, i utsagn 23.-25. blir elevene enige om at de må omformulere problemet sitt, siden dataene ikke gir dem svar på hvordan været blir i neste uke. Her er elevene i trinnet *konklusjon.* △

Oppgave 7

I læreverket *Stokastik* er det beskrevet fem ulike syn elever kan ha på begrepet gjennomsnitt.

a) Beskriv kort disse fem synene.

Sensurveiledning

1. Modalt: tenker på gjennomsnittes som typetallet, den verdien som forekommer hyppigst i datamaterialet.

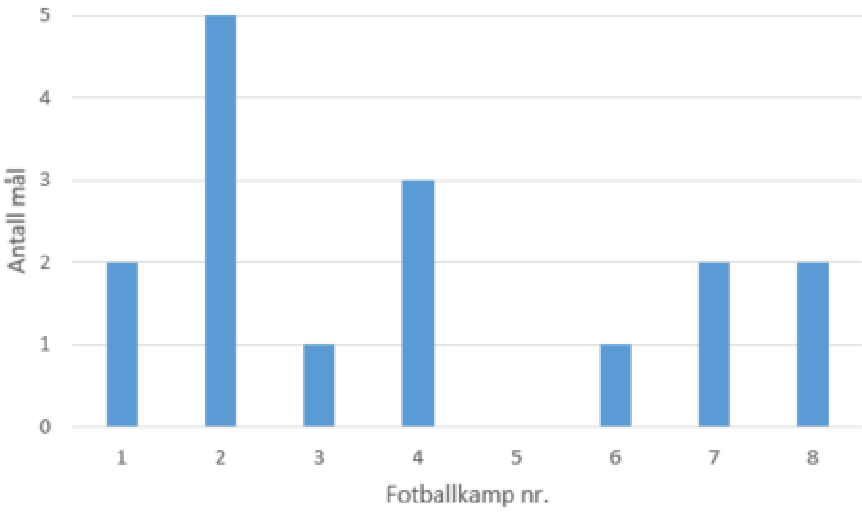
2. Algoritmisk: bruker algoritmen for gjennomsnitt, finner en sum og dividerer på antall observasjoner. Tenker at andre muligheter ikke finnes

knyttet til gjennomsnitt.

3. Fornuftspreget: bygger gjennomsnittsverdi på erfaringer, enten matematiske eller hverdagslige.
4. Midtpunkt: en forventning om at gjennomsnittet må være omtrent i midten i datamaterialet.
5. Matematisk balansepunkt: ser på gjennomsnittet som noe som avbalanserer store og små verdier. Kan ses på som å jevne ut slik at alle verdier er like store.

△

b) Vis hvordan elever med disse ulike synene på gjennomsnitt kan tenkes å argumentere for hva gjennomsnittet av antall mål i fotballkampene er, ut ifra diagrammet under.



Sensurveiledning

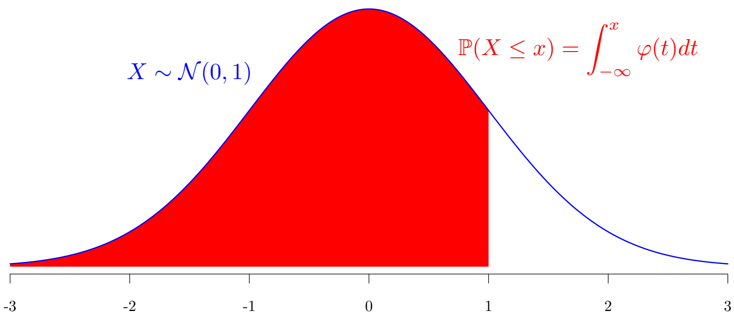
1. Modal forståelse: eleven kan tenke det er flest kamper med 2 mål, dermed er gjennomsnittet 2".
2. Algoritmisk forståelse: eleven bruker algoritmen, dvs. summerer antall mål og deler på antall kamper, det blir 2.
3. Fornuftspreget: eleven baserer gjennomsnittet sitt på hva som er det mest vanlige antall mål i fotballkamp, ut ifra egne erfaringer.

4. Midtpunkt: eleven kan f.eks. tenke at "2,5 er midt på skalaen, så gjennomsnittet er 2,5".
5. Matematisk balansepunkt: eleven tenker at han jevner ut alle søylene og får at alle søylene har en høyde på 2 mål.

$\triangle$

[Schou, J., Jess, K., Hansen, H. C. & Skott, J. (2013). *Matematikk for lærerstuderende. Stokastik. 1.-10. klasse.* Gylling: Samfundslitteratur]

Vedlegg 1
Standard normalfordeling



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990