NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for lærerutdanning

Eksamensoppgave i LGU52015 MATEMATIKK 2 (5-10), EMNE 2

Sensurveiledning

Faglig kontakt under eksamen: Eivind Kaspersen[a], Per G. Østerlie[b], Øistein Gjøvik[c], Marius Lie Winger[d], Solomon Tesfamicael[e]

Tlf: [a]906 83 682 , [b]911 40 134 , [c]73 55 94 16 , [d]404 83 797 , [e]464 48 786

Eksamensdato: 7. juni 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–15:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Tillatte hjelpemidler er enkel kalkulator uten grafisk display, som ikke kan kommunisere trådløst og valgfri utgave av LK06.

Annen informasjon:
Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Den endelige karakteren vil bygge på en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 11

Antall sider vedlegg: 3

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Orginalen er:

1-sidig ☒ 2-sidig ☐

sort/hvit ☐ farger ☒

skal ha flervalgskjema ☐

Kontrollert av:

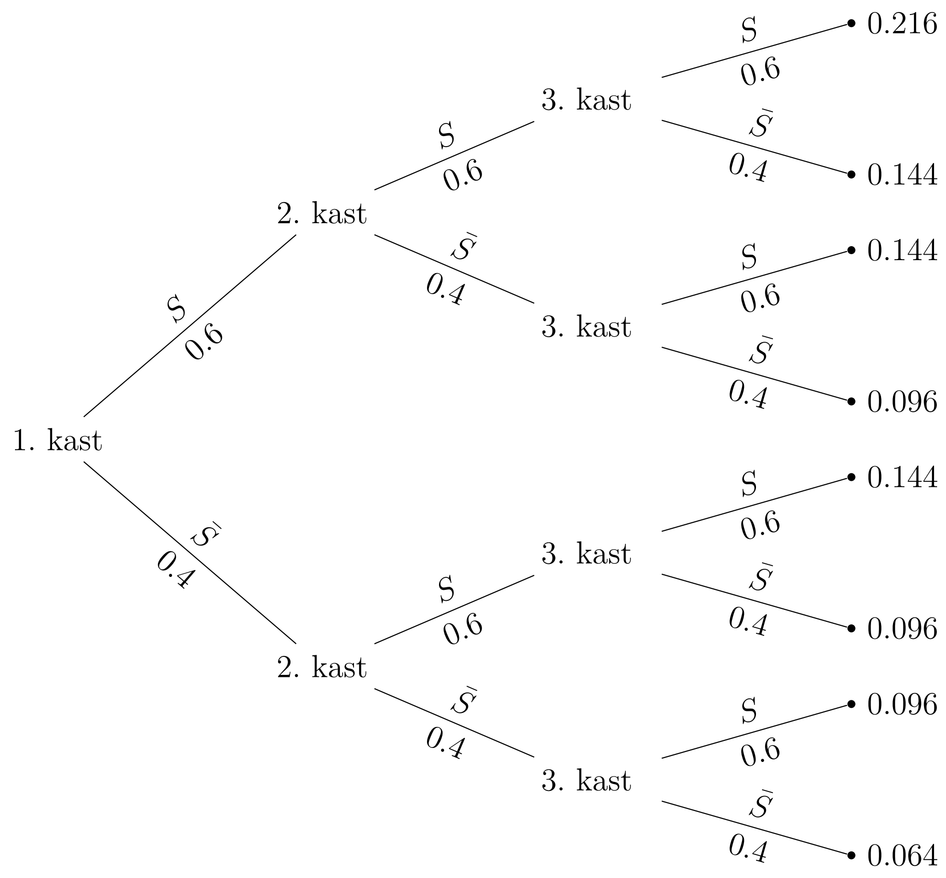
Dato Sign

Oppgave 1
Du skal utføre et eksperiment der du kaster en tegnestift tre ganger. Sannsynligheten for at et kast ender med spissen ned er 0.4. Sannsynligheten for at den ender med spissen opp er 0.6

a) Sett opp et sannsynlighetstre for eksperimentet og før på sannsynlighetene.

Sensurveiledning

Definerer S som hendelsen «spiss opp» og tegner treet



△

b) Hva er sannsynligheten for å få spissen opp akkurat to ganger på rad?

Sensurveiledning

Sannsynligheten for å få spissen opp akkurat to ganger på rad kan vi finne ut fra sannsynlighetstreet. La hendelsen: «å få spiss opp i første kast» skrives som S_1. Da har vi

$$P(S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3) = 0.144$$

$$P(\bar{S}_1 \cap S_2 \cap S_3) = 0.144$$

Sannsynligheten blir da $0.144 + 0.144 = 0.288$. △

c) Hvilke krav stilles til eksperimentet for at dette skal være et binomisk eksperiment? Nevn to andre situasjoner som kan beskrives ved hjelp av binomialfordeling.

Sensurveiledning

For at dette skal være et binomisk eksperiment må sannsynligheten være den samme for hvert forsøk, det må være to utfall (som kan betegnes som «suksess» eller «ikke suksess») og forsøkene må være uavhengige av hverandre. △

d) Sett opp en tabell over sannsynlighetene for å få henholdsvis 0, 1, 2 og 3 spiss opp i eksperimentet.

Sensurveiledning

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0.6^3 \cdot (1 - 0.6)^{3-3} = 0.216$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0.6^2 \cdot (1 - 0.6)^{3-2} = 0.432$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0.6^1 \cdot (1 - 0.6)^{3-1} = 0.288$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0.6^0 \cdot (1 - 0.6)^{3-0} = 0.064$$

Det forventes tydelig utregning for full uttelling. △

Oppgave 2
Beskriv en utforskende undervisningsaktivitet som får fram forskjeller på sentralmål og spredningsmål

Sensurveiledning

Se f. eks. Stokastikk s. 49 △

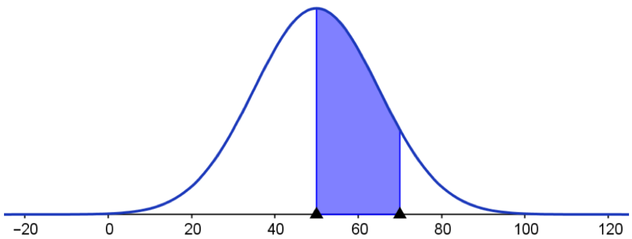
Oppgave 3
En type mobiltelefon har en batteritid som er normalfordelt med forventningsverdi 50 timer og standardavvik 15 timer.

a) Hva er sannsynligheten for at en mobil som er fulladet har en batteritid på mellom 50 og 70 timer?

Sensurveiledning

La X være batteritida målt i timer. Vi skal finne $P(50 < X < 70)$. Batteritida er normalfordelt og vi må ta foreta en konvertering for å få standard normalfordeling.

$$\begin{aligned} P(50 < X < 70) &= P\left(\frac{50-\mu}{\sigma} < Z < \frac{70-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P(0 < Z < 1.33) = P(Z < 1.33) - P(Z < 0) \\ &\approx 0.9082 - 0.5000 = 0.4082 \end{aligned}$$



△

b) Hva er sannsynligheten for at batteritiden er mindre enn 40 timer?

Sensurveiledning

$$\begin{aligned} P(X < 40) &= P\left(Z < \frac{40-50}{15}\right) \\ &= P\left(Z < -\frac{10}{15}\right) = P(Z < -0.67) \\ &= 1 - P(Z < 0.67) \approx 1 - 0.7486 = 0.2514 \end{aligned}$$

△

c) Hva er sannsynligheten for at batteritiden er mindre enn 50 timer?

Sensurveiledning

$$P(X < 50) = P(Z < 0) = 0.5$$

△

d) Hva er sannsynligheten for at batteritiden er mer enn 65 timer?

Sensurveiledning

$$P(X > 65) = P\left(Z > \frac{65-50}{15}\right) = P(Z > 1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$$

△

e) Hvordan kunne du ha svart på c) og d) uten å slå opp i tabell?

Sensurveiledning

I c) kan vi observere at det er 50 % sannsynlighet for å være under middelverdien, pr definisjon av normalfordeling.

I d) kan vi bruke at det er 68 % sjanse for å være innenfor et standardavvik fra forventningsverdien. Det vil si at det er 50 % + 34% sjanse for å være under et forventningsverdi pluss et standardavvik, dermed er det $(100-84)\% = 16\%$ sjanse for å være over forventningsverdi pluss et standardavvik. △

Oppgave 4

a) Hva vil det si å være en «datadetektiv» (jfr. pensumlitteraturen)?

Sensurveiledning

Det er forventet at kandidaten beskriver de fem elementene i syklusen og samtidig poengterer at det er en syklus, for eksempel at man ikke trenger å starte med problemstillingen, eller at man kan gå flere runder. △

b) I «Research on Students' Understandings of Probability» diskuterer Shaughnessy ulike oppfatninger elever har om sannsynlighet. Grei ut om minst tre av disse.

Sensurveiledning

Gi en fyldig beskrivelse av minst tre oppfatninger fra artikkelen. △

Oppgave 5

Diameteren på en tilfeldig pizza av typen Grandpapa er normalfordelt med forventning μ og standardavvik σ.

Det tas et tilfeldig utvalg av seks pizzaer hvor diameteren måles.

Diameter i cm	30	32	29	30	31	31

a) Regn ut gjennomsnittsdiameteren av pizzaene i utvalget. Forklar hva gjennomsnittet måler.

Sensurveiledning

Gjennomsnittet av diameterne til pizzaene

$$\bar{x} = \frac{30+32+29+30+31+31}{6} = 30.5$$

Det forventes at kandidaten gir en forklaring som inneholder at gjennomsnitt er et sentralmål og gir en kort forklaring på hva det er. △

b) Finn standardavviket til pizzaene i utvalget. Forklar hva standardavviket måler.

Sensurveiledning

Standardavviket finner vi ved

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

X_i	$(X_i - \bar{X})^2$	
30	$2 \cdot (30 - 30.5)^2$	0.5
32	$(32 - 30.5)^2$	2.25
29	$(29 - 30.5)^2$	2.25
31	$2 \cdot (31 - 30.5)^2$	0.5
sum		5.5

$$s = \sqrt{\frac{5.5}{6}} \approx 0.9574$$

Det forventes at kandidaten gir en forklaring som inneholder at standardavvik er et spredningsmål og gir en kort forklaring på hva det er. △

c) Finn et punktestimat for gjennomsnittsdiameteren for alle pizzaene av typen Grandpapa. Begrunn svaret.

Sensurveiledning

Gjennomsnittsdiameteren $\bar{x} = 30.5$ er et estimat for gjennomsnittet av alle pizzaene. Dette er et punktestimat fordi det er den eneste dataen vi har tilgjengelig. △

d) Finn et punktestimat for variansen til alle pizzaene av typen Grandpapa. Begrunn svaret.

Sensurveiledning

Et punktestimat for variansen til pizzaene er gitt ved

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{2\cdot(30-30.5)^2 + (32-30.5)^2 + (29-30.5)^2 + 2\cdot(31-30.5)^2}{5} \\ &= 1.1\end{aligned}$$

En kommentar om forskjellen mellom punktestimatet til variansen og variansen basert på utvalget forventes. △

e) Finn et 95% konfidensintervall for μ, basert på de seks målingene.

Sensurveiledning

Et 95% konfidensintervall for μ er gitt ved

$$\left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\,,\, \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

hvor $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ og $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ Finner $s = \sqrt{\hat{\sigma}} = \sqrt{1.1} \approx$ 1.049

$$\begin{aligned}\left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\,,\, \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right] &\approx \left[30.5 - 1.96 \cdot \frac{1.049}{\sqrt{6}}, 30.5 + 1.96 \cdot \frac{1.049}{\sqrt{6}}\right] \\ &\approx [29.67, 31.34]\end{aligned}$$

△

Oppgave 6

Kantina ved et universitet har etter grundige studier funnet ut at 80 % av studentene som besøker kantina også handler varer der. De ansatte ønsker å heve andelen kunder og setter i gang en kampanje ved å sette opp reklameplakater og ta på t-skjorter med bilder av varene. Etter noen dager med kampanje teller de at 19 av de 20 besøkende kjøpte noe.

Bruk hypotesetesting og vurder om de kan hevde at kampanjen har ført til økt salg

Sensurveiledning

Her kan vi sette opp disse hypotesene

H_0 : Kampanjen har ikke ført til at en større andel av de besøkende kjøper noe i kantina
H_1 : Kampanjen har ført til at en større andel av de besøkende kjøper noe i kantina

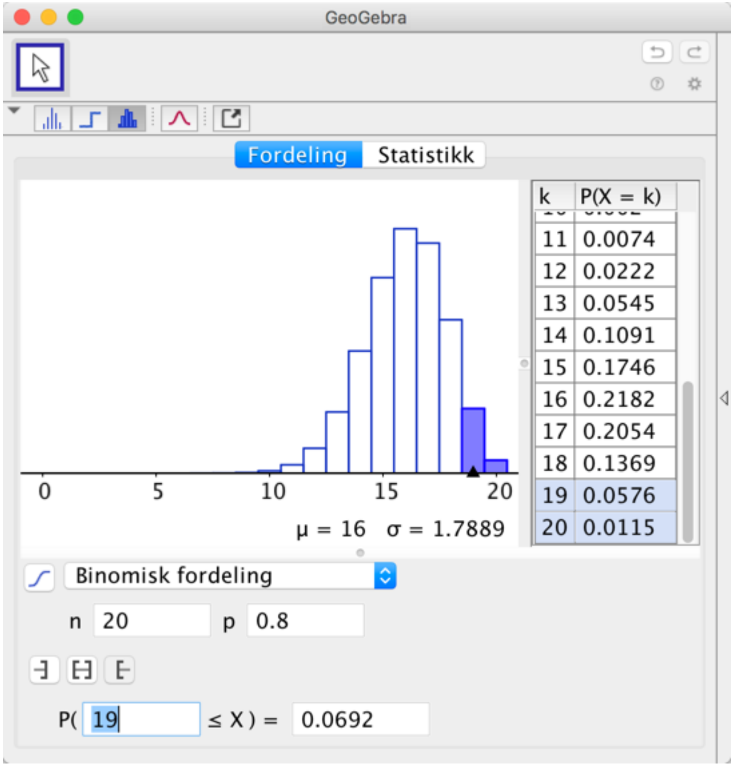
En annen måte å formulere det på er

$$H_0 : p = 0.8$$
$$H_1 : p > 0.8$$

Opptellinga av antallet som kjøpte noe viser at andelen som kjøpte er $\frac{19}{20} = 0.95$. Det er mer enn 80 %. Det er en større andel enn tidligere, men hypotesetesten må avgjøre om det kunne ha skjedd ved en tilfeldighet. Siden testen dreier seg om en besøkende handlet eller ikke er dette en binomisk fordeling. Vi finner sannsynligheten for at det skal være 19 eller 20 i utvalget på 20 personer når vi antar at sannsynligheten for at de handler er $p = 0.8$.

Vi kan regne ut sannsynligheten slik

$$\binom{20}{19} \cdot 0.8^{19} \cdot 0.2 + \binom{20}{20} \cdot 0.8^{20} = 20 \cdot 0.8^{19} \cdot 0.2 + 0.8^{20} \approx 0.0692$$



Nå må vi vurdere sannsynligheten vi fant. Det er vanlig å sette signifikansnivået til 5 %. Sannsynligheten ligger over det og da har vi ikke grunnlag for å forkaste nullhypotesen.

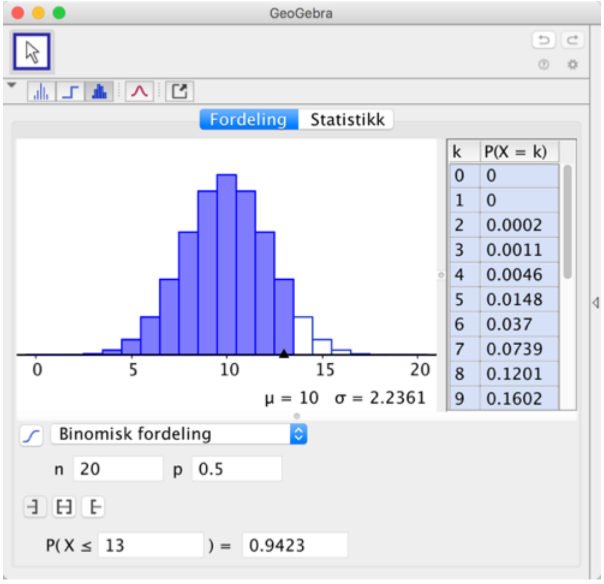
Setter vi et høyere signifikansnivå, f. eks. 7 % må nullhypotesen forkastes siden p-verdien ligger under det. △

Oppgave 7

Denne oppgaven ble gitt til noen elever:

> En ekspert på kaffe hevdet at han kunne kjenne forskjell på kaffe fra to forskjellige typer kaffetraktere. Det ble gjennomført en test hvor eksperten smakte på 20 kopper kaffe. I 13 av tilfellene ga eksperten korrekt svar. Benytt en hypotesetest til avgjøre om testpersonen kan kalles en ekspert på å smake kaffe.

En elev benyttet statistikkalkulatoren i GeoGebra for løse oppgaven. Figuren under viser et skjermbilde av hva eleven gjorde.



Konklusjonen til eleven var at eksperten var meget god til å avgjøre hvilken type kaffe det var siden han med 94 prosent sannsynlighet kunne bestemme kaffetypen.

a) Kommenter hvordan eleven har brukt GeoGebra og konklusjonen som er trukket.

Sensurveiledning

Eleven har benyttet statistikkalkulatoren i GeoGebra til å finne kumulative sannsynligheter i en binomisk fordeling hvor $n = 20$ og $p = 0.5$. Eleven har funnet at $P(X \leq 13) \approx 0.9423$. Svaret forteller at sannsynligheten for at forsøkspersonen skal greie å kjenne forskjell på 13 eller færre smaksprøver er ca. 0.9423, dersom vi antar nullhypotesen. △

b) Hva vil du si om kaffeeksperten?

Sensurveiledning

For å avgjøre om forsøkspersonen oppnår et bedre resultat enn ved ren tipping er det den komplementære sannsynligheten vi må se på. Den kan vi finne ved

$$P(X > 13) \approx 1 - 0.9423 = 0.0577$$

Vi må også legge til sannsynligheten for at forsøkspersonen greier akkurat 13

$$P(X = 13) = \binom{20}{13} \cdot 0.5^{13} \cdot 0.5^{7} \approx 0.073929$$

Da har vi at

$$P(X \geq 13) \approx 0.131629$$

Det betyr at resultatet kan oppnåes med 13.2 % sannsynlighet bare ved tipping. Da bør konklusjonen være at det ikke dreier seg om en kaffeekspert.

$\triangle$

Vedlegg 1
Formelark for sannsynlighetsregning og statistikk

Binomialkoeffisient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Addisjonssetningen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Definisjon av betinget sannsynlighet

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Varians og standardavvik

n enkeltobservasjoner

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

forventningsrett estimator

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Bayes' formel

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$

Forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel X

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{\text{alle } x_i} x_i \cdot P(X = x_i)$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{\text{alle } x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Hypergeometrisk fordeling

$$P(X=x)=\frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad \mathrm{E}(X)=np, \qquad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

der $p = {}^{S}/_{N}$.

Binomisk fordeling

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \qquad \mathrm{E}(X)=np, \qquad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)$$

Dersom X er normalfordelt med forventning μ og varians σ^2, og

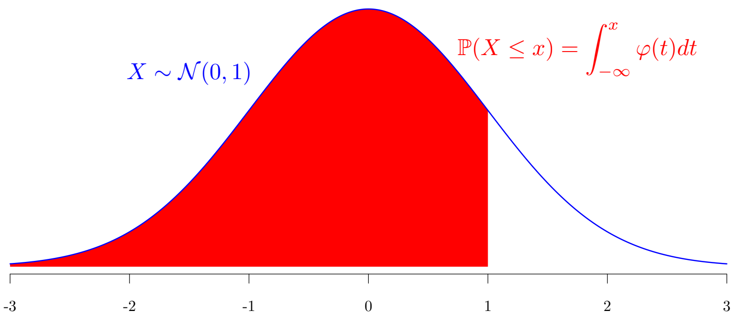
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

så er Z normalfordelt med forventning 0 og varians 1.

Dersom $\bar{X}$ er gjennomsnittet av n uavhengige observasjoner hentet fra en normalfordelt populasjon med forventning μ og varians σ^2, da er Z normalfordelt med forventning 0 og varians 1 der

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Vedlegg 2
Standard normalfordeling



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990