NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for lærerutdanning

Eksamensoppgave i
LGU51014 MATEMATIKK 1 (5-10), EMNE 1

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Andersen Lundeby

Tlf.: 95776288 / 73412628

Eksamensdato: Mandag 29. mai 2017

Eksamenstid (fra-til): 09:00-15:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:

Tillatte hjelpemidler er vanlige skrivesaker og valgfri utgave av LK06. I tillegg kan kandidaten medbringe ett A4-ark med egne notater på begge sider.

Annen informasjon:

Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Den endelige karakteren vil bygge på en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (uten forside): 3

Antall sider vedlegg: 0

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig □ **2-sidig** □

sort/hvit □ **farger** □

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

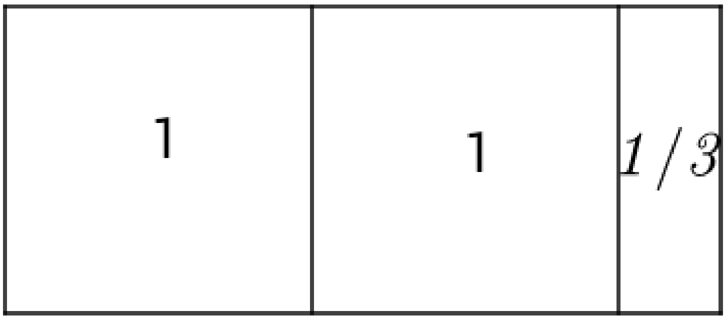
Jan skal gjøre fire oppgaver på 2 ⅓ time, og han ønsker å fordele tiden likt på oppgavene.

a. Begrunn hvorfor dette kan tolkes som delingsdivisjon.

Det er gitt hvor mange deler 2 ⅓ timer skal deles i. Det er fire deler, og det er tiden på hver del Jan skal finne. Det kan også formuleres ved å si at vi vet hvor mange en mengde skal deles på, og at svaret forteller hvor mye tid det blir til hver del.

b. Løs oppgaven ved å benytte en arealmodell.

2 ⅓ : 4 kan illustreres slik:



Arealet kan da deles i fire like deler, og det er mulig å regne hver del i timer eller minutter:

15 min. 1/4	15 min. 1/4	5 min. 1/12
1/4	1/4	1/12
1/4	1/4	1/12
1/4	1/4	1/12

Vi har da at en firedel av 2 ⅓ timer er 15+15+5=35 minutter eller 7/12 time.

c. Benytt de samme tallene, 4 og 2 ⅓, til å lage en tekstoppgave/regnefortelling. Oppgaven skal kunne tolkes som målingsdivisjon.

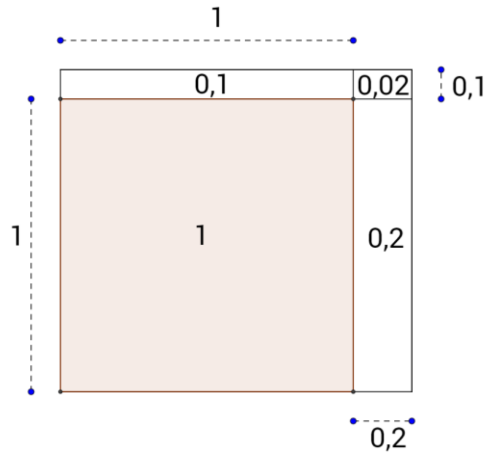
I målingsdivisjon skal en mengde deles i grupper, og hver gruppe har et gitt antall/mengde. Vi skal altså finne antall slike grupper. Sagt med andre ord skal vi finne hvor mange enheter vi trenger for å fordele en mengde. Her kan det for eksempel være at du har 2 ⅓ liter saft som skal fordeles i glass som hver har plass til 4 dl. Hvor mange glass får du fylt? Det kan også være relevant å spørre hvor mange hele glass du kan fylle, og om det blir en rest.

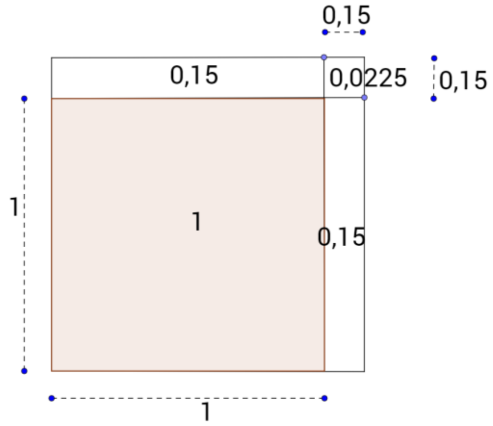
Oppgave 2

Bente og Lars på 9. trinn fikk følgende oppgave:

Stine og Tore hadde i 2014 lik lønn. I januar 2015 fikk Stine 10 % lønnsøkning, mens Tore fikk 15 % lønnsøkning. I januar 2016 fikk Stine 20 % lønnsøkning og Tore 15%.
Hva kan du si om lønnen til Stine og Tore i 2016?

a. Løs oppgaven. Benytt en figur/illustrasjon som understøtter strategien du benytter.
Årslønnen i 2014 er ikke relevant i denne sammenhengen og kan settes til 1. Vi kan for hvert av årene multiplisere med en vekstfaktor, henholdsvis 1,1 og 1,2 for Stine og $1{,}15^2$ for Tore. Lønnsdifferansen i 2016 er svært liten i prosent. Stine får totalt 32% økning og Tore 32,25%. En arealmodell kan vise lønnsøkningen til Stine:





Lønnen i 2014 er representert med 1x1-kvadratet. Stine får en økning fra 2014 på 0,1+0,2+0,02=0,32=32%.

Følgende dialog utspiller seg mellom Bente og Lars:

Bente: *Uansett hvordan vi regner ut dette så får Tore mest lønn i 2016. Det kan ikke stemme.*

Lars: *Ja, jeg mener at Stine burde endt opp med høyest lønn til slutt fordi hun er helt oppe i 20% økning fra 2015 til 2016, det er jo hele 6/5 av lønnen i 2015! Vi må ha regnet feil.*

Bente: *Ja, det er rart. Men jeg mener at de skal ha like høy lønn i 2016 fordi 15% pluss 15% er like mye som 10% pluss 20%*.

b. Kommenter Bente og Lars sine utsagn. Hvordan vil du som lærer hjelpe Bente og Lars videre?

Lars er av den oppfatning at det høyeste tallet er avgjørende for hvem som får høyest lønn til slutt, mens Bente sammenligner summen av prosenttallene. Det kan være naturlig å gripe fatt i Bentes siste utsagn gjennom å endre/forenkle tallene. Ved å spørre om 0% fulgt av 100% lønnsøkning blir det samme som 50% fulgt av 50% lønnsøkning, og i neste omgang sammenligne 90% og 10% mot 50% og 50%. Ved å sette lønnen til for eksempel 100 kroner blir det tydeligere at lønnen er ulik i 2016, og at det å addere prosenttallene eller vekstfaktorene ikke gir svar på hvem som får mest.

Oppmerksomheten kan rettes mot multiplikasjon gjennom en arealmodell. Lars nevner at 6/5 økning tilsvarer 20% økning. Fra brøkregningen kan det være at Lars forstår at det er snakk om multiplikasjon når man skal ta en brøkdel av noe, også uekte brøker som 6/5. Derfor kan det være en mulighet å erstatte prosent med brøk. Videre bør det belyses at multiplikasjon er kommutativ. Er det det samme om vi får 10% lønnsøkning først fulgt av 90%, eller omvendt?

Det er sentralt at du som lærer ikke forklarer hva som er galt med resonnementene til elevene eller bedriver traktkommunikasjon som fordrer korte elevsvar. En god besvarelse legger vekt på å få fram elevenes tenkning, tilrettelegging av oppgaver og (mot)spørsmål som fokuserer på det matematiske innholdet og relevante modeller.

Oppgave 3

Den assosiative loven *a·(b·c) = (a·b)·c* er sentral i arbeidet med å utvikle regnestrategier i multiplikasjon.

a. Foreslå en aktivitet/oppgave for elever på 5.- 6. trinn som du mener er hensiktsmessig med tanke på at de kan oppdage den assosiative loven. Aktiviteten beregnes til å vare omtrent en klokketime. Dette inkluderer en kort introduksjon av deg og en avslutning/diskusjon.

   Her er det nærliggende å tenke på volum og en kasse som kan plasseres på ulike måter. Det kan være at du har for eksempel 24 terninger (kuber) som skal pakkes i kasser. Hvor mange ulike kasser (rette prismer) kan du lage? Dette er en åpen oppgave som kan løses på ulike måter, med og uten konkreter. Gjennom forsøk med ulike grunnflater og høyder, og plasseringer av kassen kan assosiativitet tydeliggjøres.

b. En kollega av deg lurer på om regneoperasjonen divisjon er assosiativ, det vil si at *a:(b:c)=(a:b):c*, fordi 8:(4:1)=(8:4):1. Hva ville du ha sagt til din kollega?

   Din kollega har funnet et eksempel på assosiativitet for noen bestemte tall, og ved nærmere ettersyn fungerer dette alltid så lenge c=1 eller a=0. Det er enkelt å finne et moteksempel som viser at dette ikke er en generell lov. Din kollega har kanskje erfaring med algebra og symbolmanipulasjon som å vise at $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}, \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$ *gir ekvivalens* $\frac{ac}{b} = \frac{a}{bc}$ *når c = 1 eller a=0.*

   For enkelhets skyld kan du anta at a, b og c er større enn 1. En verbal forklaring kan da være at dividend og divisor ikke er proporsjonale størrelser når parentesen «flyttes». I tilfelle a>b>c er det da enkelt å se at a:(b:c) har større dividend og mindre divisor enn i (a:b):c.

Oppgave 4

a. Vi buker et posisjonssystem med base 10. Hvorfor kan det være nyttig å se på posisjonssystem med en annen base?

Ved å se på posisjonssystem med en annen base enn den vi er vant til, kan man øke forståelsen for hva det faktisk betyr at vi har det posisjonssystemet vi har.

b. Gjør om 26_{ti} og 45_{ti} til tretallsystemet. Legg sammen tallene du kommer fram til, og omgjør tilbake til titallsystemet for å sjekke svaret ditt. Begrunn alle steg.

Når vi gjør om til tretallsystemet må vi se på hvor mange treerpotenser vi «får plass til» i 25_{ti} og 45_{ti}. Vi har $3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27$ og $3^4 = 81$.
Vi starter med 25_{ti}. Her får vi plass til $2 \cdot 3^2 = 18$, og står igjen med $25_{ti} - 18_{ti} = 7_{ti}$.
Her får vi plass til $2 \cdot 3^1 = 6$, og står igjen med $7_{ti} - 6_{ti} = 1_{ti}$. Da får vi

$$25_{ti} = 221_{tre}$$

Tilsvarende finner vi at

$$45_{ti} = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 = 1200_{tre}$$

Så skal vi legge sammen disse tallene i tretallsystemet for så å gjøre om til titallsystemet for å sjekke svaret.
$222_{tre} + 1200_{tre} = 2122_{tre}$ *(fordi $2_{tre} + 2_{tre} = 11_{tre}$)*
Gjør om tilbake til titallsystemet:

$$2122_{tre} = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 27 + 9 + 2 \cdot 3 + 2 = 54 + 9 + 6 + 2$$
$$= 71_{ti} = 26_{ti} + 45_{ti}$$

c. Et av disse tallene er skrevet feil. Hvilket er det, og hvorfor kan det ikke skrives på denne måten?

i. 11011_{to}

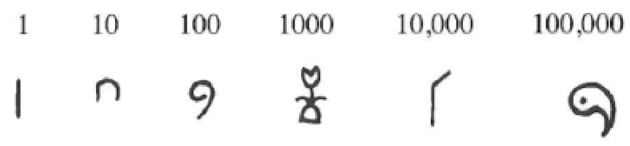
ii. 341_{fem}

iii. 37_{sju}

iv. 21211_{tre}

37_{sju} er skrevet feil. Sifrene man har i sjutallsystemet er 0, 1, 2, 3, 4, 5 og 6, så 7 kan ikke brukes.

d. Egypterne brukte følgende symboler i sitt additive tallsystem:



Bruk dette til å skrive 243_{ti} i det egyptiske tallsystemet, og begrunn hvorfor det blir slik.

Det er et additivt tallsystem så da legger man sammen verdien av symbolene uten å tenke på posisjon. Vi skal finne 243_{ti} så da trenger vi 3 enere, 4 tiere og 2 hundrere. Dette kan skrives på flere måter, her er to eksempel:

Oppgave 5

a. Finn største felles divisor og minste felles multiplum til 18 og 30. Hvordan vil du til en ungdomsskoleelev forklare disse to begrepene og hva de kan brukes til?

Vi skriver tallene som produkt av primtall $18 = 2 \cdot 3^2$ og $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Da ser vi at største felles divisor er $sfd(18,30) = 2 \cdot 3 = 6$ og minste felles multiplum er $mfm(18,30) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.
La a være et naturlig tall. Alle tall som a kan deles på uten rest, kaller vi for divisorene av a. Alle tall som vi får ved å multiplisere a med et annet tall kalles vi for multiplum av a.

Største felles divisor av to tall er det største tallet som er divisor av begge tall. En måte å jobbe med dette på i skolen er å la eleven undersøke hvordan divisorene av et tall er bygget opp som produkt av primtallsfaktorer i tallet. Elevene kan lage faktortrær og finne alle divisorene. For å finne størst felles divisor av to tall bør man bruke alle de felles primtallfaktorer av de to tallene. Hver primtallsfaktor blir opphøyd i den minste potensen det finnes i primtallsfaktoriseringene av de to tallene. I eksempelet ovenfor er disse primtallsfaktorene 2 og 3. Minste potens som finnes er 1 til begge, så den størst felles divisor blir $2 \cdot 3 = 6$.

Det minste felles multiplum av to tall er det minste tallet som er et multiplum av begge tall. Multiplum er et begrep som kommer veldig tidlig i skolen uten å bruke det faglige begrepet, allerede i første trinn, når elevene lærer seg å stegtelle med 2, 3, osv. Når vi teller med 3 for eksempel, finner vi alle multiplum av tallet 3. En kan også bruke primtallsfaktoriseringer til å finne minste felles multiplum til to tall som i eksempelet ovenfor. Minste felles multiplum er produktet av alle primtallfaktorene av begge tall. Hver primtallsfaktor blir opphøyd i den største potens som finnes i faktoriseringene av de to tallene. I eksempelet ovenfor er de primtallfaktorene 2, 3, og 5. Største potensen for 3 er 2, og for 2 og 5 er den størst potensen 1. Da er minste felles multiplum $2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Største felles divisor kan brukes for eksempel til å forkorte en brøk og minste felles multiplum til å finne fellesnevner i brøk.

b. Vis/begrunn hvorfor det er slik at alle tall der de siste to sifrene er delelig med 4, er selv delelig med 4. (For eksempel er 216 delelig med 4 fordi 16 er delelig med 4.)

Hvis et tall har mer enn to sifre, så kan det skrives som en sum av to tall, der det ene er et multiplum av 100 og det andre består av dets to siste sifre. For eksempel $216 = 2 \cdot 100 + 16$. *Siden 100 er delelig med 4, så er alle multiplum av 100 delelig med 4, så det første tallet i summen er delelig med 4. I eksempelet,* $2 \cdot 100 = 2 \cdot 4 \cdot 25 = 4 \cdot (2 \cdot 25)$. *Hvis i tillegg det andre tallet er delelig med 4, da er tallet vi begynte med delelig med 4, siden det er en sum av to tall som er delelig med 4. I eksempelet,16 er delelig med 4, siden* $16 = 4 \cdot 4$. *Da er* $216 = 4 \cdot (2 \cdot 25) + 4 \cdot 4 = 4 \cdot (2 \cdot 25 + 4)$.

c. Kari på 7. trinn jobber med multiplikasjonsoppgaver og sier følgende når læreren spør hvordan det går:

> «Hver gang jeg ganger sammen to oddetall, får jeg et nytt oddetall som svar. Hvorfor er det slik?»

Hvordan ville du vist Kari og resten av klassen at dette alltid stemmer?

En kan bruke forskjellige modeller av multiplikasjon for å argumentere her. For eksempel kan en tenke på multiplikasjon som gjentatt addisjon. Det å multiplisere et oddetall med et annet oddetall blir da det samme som å legge et oddetall til seg selv et odde antall ganger. Et oddetall består av et antall 2'ere pluss 1. Dette kan representeres med en tegning eller med konkreter. For eksempel 11 kan representeres som et tårn bygget av 5 par legoklosser og en kloss alene på toppen. Legger vi sammen to 11-tårn får vi et tårn med $5+5=10$ *par klosser og et par klosser til som utgjøres av enkeltklossene på toppen. Totalt er det da 11 par klosser, som er et partall. Legger vi til et 11- tårn til, får vi et tårn med* $11+5=16$ *par klosser og en alene på toppen, som er et oddetall, osv.*
Arealmodellen for multiplikasjon kan også være fornuftig å bruke her.