NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for lærerutdanning

SENSURVEILEDNING for eksamensoppgave i MGLU1503 Matematikk 1 (5-10) emne 1

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind H. Lien [a], Øyvind A. Lundeby [b], Yvonne Grimeland [c]

Tlf.: 995 91 836 [a], 957 76 288 [b], 481 14 352 [c]

Eksamensdato: 11. desember 2019

Eksamenstid (fra-til): 09.00-15.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ett A4-ark med notater på begge sider. Valgfri utgave av LK06.

Annen informasjon: Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Prosentverdiene over hver oppgave er veiledende for hvordan oppgavene vektes i vurderinga. Den endelige karakteren blir satt på grunnlag av en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (uten forside): 2 (eksamensoppgaven, ikke sensurveiledninga)

Antall sider vedlegg: 0

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ **2-sidig** ☐

sort/hvit ☐ **farger** ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 (21%)

a) Lag tre forskjellige regnestykker som involverer multiplikasjon som har samme svar som $63 \cdot 15$ (regnestykket trenger ikke å bestå av bare to tall som multipliseres). Argumenter for at svaret du får er det samme som svaret på $63 \cdot 15$ uten at du faktisk regner det ut.

Bruk av assosiativitet, distributivitet (og kanskje kommutativitet) på ulike måter. Både assosiativitet og distributivitet bør brukes i en god besvarelse for å vise varierte strategier/regnestykker. Dersom disse egenskapene brukes bør en kommentere at det er det en har brukt. Det kreves en forklaring på hvorfor det en har gjort er matematisk korrekt.

Noen mulige oppdelinger av tallene er:

$$63 = 60 + 3 = 50 + 13 = 6 \cdot 10 + 3 = 100 - 30 - 7 = 7 \cdot 9 = 7 \cdot 3 \cdot 3$$

$$15 = 10 + 5 = 20 - 5 = 30 : 2 = 6 + 9 = 5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5 = 60 : 4$$

b) Lag to oppgaver med kontekster som passer til $120 : 4$. Den ene konteksten skal være målingsdivisjon og den andre konteksten delingsdivisjon. Ta i bruk hensiktsmessige modeller for å løse oppgavene.

Noen mulige målingsdivisjonskontekster:

Har 120 klinkekuler/sjokolader/appelsiner/personer/objekter som skal plasseres i poser/esker/biler/lokasjoner/beholdere som rommer 4 av disse objektene. Hvor mange fulle beholdere?

Noen mulige delingsdivisjonskontekster:

Har 120 kroner/personer/objekter som skal fordeles jevnt på 4 personer/grupper/poser/lokasjoner/beholdere. Hvor mye i hver beholder?

Modellene skal passe til kontekstene og utregninga.

c) Ali, Bjørg, Camilla og Dankert har 16 pepperkaker de skal dele likt mellom seg. Lag et representasjonsbevis som viser at følgende strategi generelt er gyldig:

$$16 : 4 = (16 : 2) : 2$$

Modellen du tar i bruk skal passe til konteksten.

Representasjonen i representasjonsbeviset (argumentasjon som bygger på en tegning, bruk av konkreter eller en regnefortelling) må oppfylle kriteriene beskrevet i artikkelen av Enge og Valenta (2011): 1) Betydning av den involverte operasjonen er representert tydelig i tegningen, konkretene eller regnehistorien. 2) Representasjonen kan bli generalisert/tilpasset til å gjelde for en hel klasse eksempler, for eksempel alle hele tall. 3) Strategien det argumenteres for kommer tydelig frem i representasjonen og konklusjonen, og om strategien virker eller ikke følger av representasjonen. Mengdemodell er best egna til denne konteksten. Areal- og lengdemodeller kan brukes dersom det kommer tydelig fram i regnefortellinga hvordan pepperkakekonteksten passer til en slik modell.

Oppgave 2 (11%)

Løs $\frac{1}{3} : \frac{3}{8}$ ved å bruke en regnefortelling som representasjon. Regnefortellinga skal ta i bruk en modell som illustrerer utregninga.

F.eks. fordeling av 1/3 kake/pizza på bokser som rommer 3/8 kake/pizza (hvor stor del av boksen blir fylt), eller hvor mange lengder av noe en får dersom en har 1/3 m og skal lage lengder på 3/8 m. Arealmodell og lengdemodell er mest hensiktsmessig å bruke i denne oppgaven, men mengdemodell kan også godtas dersom det passer til konteksten. Modell og kontekst må uansett passe sammen.

I regnefortellinga skal det komme tydelig fram hvilke(n) strategi(er) som er brukt helt fra starten av utregninga til en har funnet svaret.

Oppgave 3 (16%)

a) Beskriv sentrale kjennetegn ved et posisjonssystem.

   Begrep som bør nevnes og forklares i en god besvarelse:

   1) Antall symboler
   2) Behov for 0
   3) Hva symbolene står for/plassverdi/gruppering/potenser av grunntallet

b) Regn ut $1101_{\mathrm{II}} \cdot 11_{\mathrm{II}}$ i totallssystemet. Forklar framgangsmåten din.

   En kan gjøre om til titallssystemet, regne ut og gjøre om til totallssystemet igjen, eller en kan gjennomføre multiplikasjonen i totalssystemet. Hvordan utregninga er gjort må uansett komme tydelig fram i en god besvarelse.

   Mulig utregning ved omgjøring til titallssystemet:

$$1101_{\mathrm{II}} \cdot 11_{\mathrm{II}} = 13_{\mathrm{X}} \cdot 3_{\mathrm{X}} = 39_{\mathrm{X}} = 100111_{\mathrm{II}}$$

   Mulig utregning uten omgjøring:

$$1101 \cdot 11 = 1101 \cdot (10 + 1) = 1101 \cdot 10 + 1101 = 11010 + 1101$$
$$= 11000 + 10 + 1000 + 100 + 1 = 100000 + 111 = 100111$$

I en god besvarelse kommer det tydelig fram hva som er gjort.

c) Gjør om 1777_{X} i titallssystemet til tilsvarende tall i firetallssystemet.

4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	4^1	4^0
4096	1024	256	64	16	4	1

$$1777_{\mathrm{X}} = 1 \cdot 1024_{\mathrm{X}} + 2 \cdot 256_{\mathrm{X}} + 3 \cdot 64_{\mathrm{X}} + 3 \cdot 16_{\mathrm{X}} + 0 \cdot 4_{\mathrm{X}} + 1 \cdot 1_{\mathrm{X}} = 123301_{\mathrm{IV}}$$

Det må komme tydelig fram hvordan en har gått fram i en god besvarelse.

d) Betrakt tallet $14{,}3_{\mathrm{V}}$ i femtallssystemet. Hva betyr sifferet 3 i dette tallet?

5^2	5^1	5^0	5^{-1}	5^{-2}
25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Sifferet på plassen bak kommaet angir hvor mange $5^{-1} = \frac{1}{5}$ en har. I dette tilfellet er det 3, noe som betyr at 3-eren i tallet $14{,}3_{\mathrm{V}}$ betyr $3 \cdot \frac{1}{5_{\mathrm{X}}} = \frac{3}{5_{\mathrm{X}}}$.

$$14{,}3_{\mathrm{V}} = 1 \cdot 5_{\mathrm{X}} + 4 \cdot 1_{\mathrm{X}} + 3 \cdot \frac{1}{5_{\mathrm{X}}} = 9_{\mathrm{X}} + \frac{3}{5_{\mathrm{X}}} = 9{,}6_{\mathrm{X}}$$

Oppgave 4 (18%)

a) Bruk en hensiktsmessig representasjon for å forklare at $-(-3) = 3$.

Forslag til kontekster: at du låner ut gjeld, at du beveger deg tre steg motsatt vei av negativ vei på ei linje. Bruke modeller, kulerepresentasjon på $0 - (-3)$, bassengrepresentasjon, oppgavestreng.

En god besvarelse bruker en hensiktsmessig kontekst til å vise at

$$0 - (-3) = -(-3) = 3$$

på en tydelig måte. En modell skal brukes dersom det er hensiktsmessig.

b) Bruk representasjonen fra a) til å begrunne hvorfor $-(-a) = a$.

En god besvarelse skal ha ei forklaring på hvorfor/hvordan den brukte representasjonen vil gjelde generelt.

Per tenker på $-(-3)$ som at han hadde 3 kroner i gjeld i går, og at denne gjelda i løpet av natta forsvant. Dermed har han nå 3 kroner mer enn i går, og derfor må $-(-3) = 3$.

c) Er Pers kontekst egna for å forstå at $-(-a) = a$? Begrunn.

Det kan være noe uheldig å bruke gjeldskonteksten for å forstå $-(-3)$ i og med at Per ikke ender opp med 3 kroner til slutt. Han ender opp med 3 kroner mer enn han begynte med (som var -3 kroner), altså 0. Det er altså endringa av pengebeholdning den positive 3-eren betyr, noe som ikke passer med at $-(-3) = 3$. Det er imidlertid mulig å bruke en gjeldskontekst for å forklare at $-(-a) = a$, men da må en formulere seg annerledes enn det Per har gjort.

Oppgave 5 (18%)

a) Finn ut hvilken brøk som er størst i hvert av tilfellene under. Du skal argumentere for løsninga di uten å bruke fellesnevner, uten å gjøre om til desimaltall og uten å basere argumentasjonen din på ei tegning alene.

i) $\frac{6}{11}$ og $\frac{3}{5}$

3/5 er størst. Noen mulige strategier:

Fellesteller, avstand fra 1, avstand fra 0,5.

ii) $\frac{12}{9}$ og $\frac{21}{15}$

21/15=7/5 er størst. Noen mulige strategier:

Forkorte brøkene og jobbe med 4/3 og 7/5, avstand fra 1 (og dermed jobbe med sammenligning av 1/3 og 2/5), avstand fra 1,5.

b) Gi to eksempler på hvordan brøken $\frac{6}{11}$ kan tolkes i brøkaspektet "brøk som forholds-tall". Forklar hvorfor eksemplene du gir passer til aspektet.

Kan f.eks. tolkes som at en har 6 deler saftkonsentrat og 11 deler vann i ei saftblan-ding, eller at forholdet mellom jenter og gutter i en klasse er jenter/gutter=6:11=6/11.

c) Skriv $1{,}1\dot{2}$ som brøk.

$$p = 1{,}1\dot{2}$$

$$100p = 112{,}\dot{2}$$

$$10p = 11{,}\dot{2}$$

$$100p - 10p = 90p = 112{,}\dot{2} - 11{,}\dot{2} = 112 - 11 = 101$$

$$p = \frac{101}{90}$$

Oppgave 6 (16%)

a) Finn $sfd(13949, 8191)$ og forklar hva dette betyr. Kan en ut fra utregninga av $sfd(13949, 8191)$ vite om tallene 13949 og 8191 er primtall eller sammensatte tall?

$$\begin{aligned} sfd(13949, 8191) &= sfd(13949 - 8191, 8191) = sfd(5758, 8191) \\ &= sfd(5758, 8191 - 5758) = sfd(5758, 2433) \\ &= sfd(5758 - 2 \cdot 2433, 2433) = sfd(892, 2433) \\ &= sfd(892, 2433 - 2 \cdot 892) = sfd(892, 649) = sfd(892 - 649, 649) \\ &= sfd(243, 649) = sfd(243, 649 - 2 \cdot 243) = sfd(243, 163) \\ &= sfd(243 - 163, 163) = sfd(80, 163) = sfd(80, 163 - 2 \cdot 80) \\ &= sfd(80, 3) = sfd(80 - 26 \cdot 3, 3) = sfd(2, 3) = 1 \end{aligned}$$

Det at $sfd(13949, 8191) = 1$ betyr at disse to tallene ikke har noen felles primtallsfaktorer. 1 er det største tallet som deler begge tallene. Vi kan ikke vite noe om disse tallene er sammensatte tall eller primtall ut fra utregninga av sfd-en. Verken at tallene er primtall eller at tallene er sammensatte tall er utelukket.

b) Finn $sfd(13949, 13079)$ og forklar hva dette betyr. Kan en ut fra utregninga av $sfd(13949, 13079)$ vite om tallene 13949 og 13079 er primtall eller sammensatte tall?

$$\begin{aligned} sfd(13949, 13079) &= sfd(13949 - 13079, 13079) = sfd(870, 13079) \\ &= sfd(870, 13079 - 15 \cdot 870) = sfd(870, 29) = sfd(870 - 30 \cdot 29, 29) \\ &= sfd(0, 29) = 29 \end{aligned}$$

Det at $sfd(13949, 13079) = 29$ betyr at begge disse tallene har 29 som faktor, og at dette er den største faktoren som deler begge tallene. De har med andre ord kun 29 som felles primtallsfaktor. I og med at begge disse tallene deles av 29 er de begge sammensatte tall.

c) Vet en etter å ha funnet $sfd(13949, 8191)$ og $sfd(13949, 13079)$ mer om 8191? Forklar.

Vi kan fortsatt ikke vite om 8191 er et primtall eller et sammensatt tall. Det vi kan vite er at 8191 ikke har 29 som primtallsfaktor. Dette fordi 13949 har 29 som faktor, og vi vet at 13949 og 8191 ikke har noen felles faktorer.

d) Finn det siste sifferet i tallet 3^{71}. Forklar strategien din og begrunn hvorfor du kan bruke den strategien du har brukt.

En mulig strategi er å prøve å finne et mønster i hvordan det siste sifferet oppfører seg i potenser med 3 som grunntall. En kan da f.eks. begynne på $3^1 = 3$, og deretter se på de påfølgende potensene med grunntall 3:

Potens	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	$3^{7+16\cdot 4} = 3^{71}$
Siste siffer	3	9	7	1	3	9	7	7

En kan se en gjentakelse i hva som blir det siste sifferet i potensene, og det er fire siffer i gjentakelsesperioden. Det betyr at 3^a har samme siste siffer som 3^{a+4} som igjen har samme siste siffer som $3^{a+4\cdot n}$, der a er et naturlig tall og n er et helt tall. Siste siffer i 3^{71} er dermed 7.

Funfact: Tallet 3^{71} er omtrent lik $7{,}51 \cdot 10^{33}$, altså $7{,}51$ kvintilliarder. Dette er et meget stort tall, faktisk omtrent like stort som det estimerte antallet bakterier på rundt 3000 jordkloder. Det estimerte antall mikroorganismer på Jorden er $2{,}5 \cdot 10^{30}$ (ifølge https://forskning.no/bakterier/bakterier-pa-godt-og-vondt/400942).