NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for lærerutdanning

# Eksamensoppgave i MGLU2503
# Matematikk 2 (5-10) emne 2

**Faglig kontakt under eksamen:** Solomon A. Tesfamicael [a], Øyvind H. Lien [b]

**Tlf.:** 464 48 786 [a], 995 91 836 [b]

**Eksamensdato:** 26. november 2019

**Eksamenstid (fra-til):** 09.00-15.00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** C: Bestemt, enkel kalkulator tillatt**.**

**Annen informasjon:** Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Karakteren blir satt etter vurdering med prosentvurderingsmetoden og en helhetsvurdering av besvarelsen.

**Målform/språk:** Bokmål

**Antall sider (uten forside):** 3

**Antall sider vedlegg:** 4

**Informasjon om trykking av eksamensoppgave**

**Originalen er:**

**1-sidig** □ **2-sidig** □

**sort/hvit** □ **farger** □

**skal ha flervalgskjema** □

**Kontrollert av:**

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

**Oppgave 1** (20%)

Du får oppgitt gjennomsnittet og variasjonsbredden til et sett med datapunkter. Gjennomsnittet er 5 og variasjonsbredden er 8.

a) Hva kan du si om datasettet på bakgrunn av disse tallene?
b) Hva kan du i tillegg si om datasettet hvis du også får oppgitt medianen?
c) Hva kan du fortsatt ikke vite om datasettet hvis du også får oppgitt medianen?
d) Gi konkrete eksempler på minst tre ulike datasett (med dataverdier) som illustrerer egenskaper ved ulike sentral- og variasjonsmål. Forklar valgene dine.

**Oppgave 2** (13%)

Gjør rede for de ulike trinnene i datadetektivens syklus. Velg ut fire sentrale begreper fra statistikken og beskriv hvordan elevene kan tilegne seg kunnskap om disse gjennom å arbeide med datadetektivens syklus. Skriv maksimalt én side.

**Oppgave 3** (16%)

I ei fruktkurv ligger det 3 epler, 4 appelsiner, 2 kiwier og 1 pære.

a) Du ønsker å trekke deg en frukt. Skriv opp utfallsrommet.
b) Lag en modell som viser hva som kan skje dersom du skal trekke to frukter.
c) Rikke ønsker å trekke seg frukt. Hendelse $A$ er at Rikke trekker en sitrusfrukt (appelsin eller kiwi) og hendelse $B$ er at Rikke trekker det hun anser som en god frukt til bruk i smoothie (eple, kiwi og pære).

   Forklar hva det følgende betyr i konteksten som er gitt:

   i. $P(B|A)$
   ii. $P(A|B)$
   iii. $P(A \cup B)$
   iv. $P(A \cap B)$
d) Finn de fire sannsynlighetene i. – iv. og forklar hva tallverdiene betyr. Ville du brukt nøyaktig denne oppgaven i undervisning? Hvorfor/hvorfor ikke?

**Oppgave 4** (15%)

Vi ser fortsatt på samme fruktkurv som i oppgave 3.

a) Magne skal trekke seg fire frukter til fruktsalat. Han deler opp og legger fruktene han trekker i fruktsalatskåla umiddelbart etter hver av fruktene er valgt. Hvor mange måter kan trekkinga gjøres på dersom
   i. rekkefølgen han trekker fruktene i ikke betyr noe
   ii. rekkefølgen han trekker fruktene i betyr noe

b) Andrine ønsker å spise alle ti fruktene i fruktkurva i løpet av en dag. Hun velger seg en frukt klokka 10 og deretter en ny frukt hver av de 9 påfølgende timene. På hvor mange forskjellige måter kan de ti fruktene velges?

c) Dersom Andrine hadde ei større fruktkurv med 10 av hver av fruktene og fortsatt skulle velge seg 10 frukter i løpet av en dag: På hvor mange måter kunne hun valgt fruktene nå?

**Oppgave 5** (12%)

I Stokastik-boka og i artikkelen til Shaughnessy (2007) blir det gitt fem generelle anbefalinger til hvordan en bør gjennomføre undervisning i sannsynlighet. En av anbefalingene er at en skal lage koblinger mellom statistikk og sannsynlighet. Forklar hvordan dette kan gjøres ved å beskrive et konkret undervisningsopplegg basert på en hensiktsmessig kontekst.

**Oppgave 6** (12%)

En middels stor skog inneholder 640 elger, hvorav 140 som er merket. En ivrig elgjeger feller til sammen åtte elger i jakta. La $Y$ være antall merkede elger i jegerens fangst.

a) Anta at $Y$ er hypergeometrisk fordelt. Finn $P(Y = 3)$ og $P(Y \leq 3)$.

I en annen, kjempestor skog er det 6400 elger, hvorav 1400 er merket. Alle jegerne i denne skogen feller til sammen 800 elger. La $X$ være antall merkede elger blant de felte.

b) Finn $P(X \leq 200)$ og $P(160 \leq X \leq 185)$.

**Oppgave 7** (12%)

Gjennomsnittlig høyde for alle norske vernepliktige menn er 180 cm. Unge menn fra Finnmark er tilsynelatende lavere. I 2011 var det 218 vernepliktige fra Finnmark, med gjennomsnittshøyde 177,5 cm (kilde: SSB). Anta at kroppshøyden til en tilfeldig ung mann fra Finnmark er normalfordelt med forventning $\mu$ og standardavvik $\sigma = 7$ cm. Anta også at det er tilfeldig hvem som utfører verneplikten. Er det grunnlag for å hevde at unge menn fra Finnmark er lavere enn landsgjennomsnittet? Utfør hypotesetest med signifikansnivå 0,01.

# Vedlegg 1
# Formelark for sannsynlighetsregning og statistikk

Binomialkoeffisient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Addisjonssetningen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Definisjon av betinget sannsynlighet

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bayes' formel

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$

## Standardavvik og gjennomsnittlig absoluttavvik

La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være observasjonene i et datasett, og $\bar{x}$ gjennomsnittet av dem. Nedenfor er det gitt tre formler:

1. Empirisk standardavvik.
2. Teoretisk standardavvik.
3. Gjennomsnittlig absoluttavvik.

1. $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ 2. $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ 3. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$

## Forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel $X$

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{\text{alle } x_i} x_i \cdot P(X = x_i)$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = \sum_{\text{alle } x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

## Hypergeometrisk fordeling

$$P(X = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad \mathrm{E}(X) = n \cdot p, \qquad \mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{N - n}{N - 1}$$

der $p = {}^{S}/_{N}$.

## Binomisk fordeling

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad \mathrm{E}(X) = n \cdot p, \qquad \mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

## Normalfordelinger

Dersom $X$ er normalfordelt med forventning $\mu$ og varians $\sigma^2$, så er

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

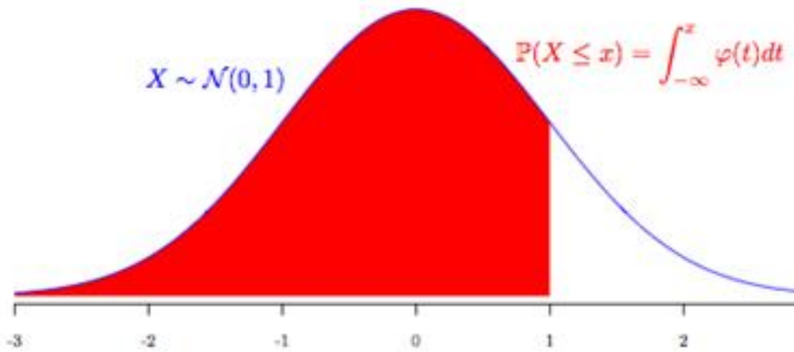
normalfordelt med forventning 0 og varians 1.

## Sentralgrenseteoremet

Dersom $\bar{X}$ er gjennomsnittet av $n$ uavhengige observasjoner hentet fra en normalfordelt populasjon med forventning $\mu$ og varians $\sigma^2$, da er $Z$ normalfordelt med forventning 0 og varians 1 der

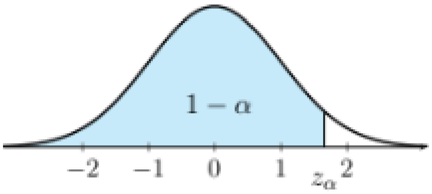
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

# Vedlegg 2: Standard normalfordeling




| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

## Vedlegg 3
## Signifikansnivåer og $z$-verdier




| $\alpha$ | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|
| $2\alpha$ | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
| $1-2\alpha$ | 0.80 | 0.90 | 0.95 | 0.98 | 0.99 |
| $z_\alpha$ | 1.28 | 1.645 | 1.96 | 2.33 | 2.58 |