NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for lærerutdanning

Eksamensoppgave i
MGLU2503/LGU52015 MATEMATIKK 2 (5-10), EMNE 2

Sensurveiledning

Faglig kontakt under eksamen: Line S. R. Eide[a], Øyvind H. Lien[b], Solomon A. Tesfamicael[c]

Tlf: [a] 482 45 253 , [b] 995 91 836 , [c] 464 48 786

Eksamensdato: 24. mai 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 15:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator.

Annen informasjon:
Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Den endelige karakteren vil bygge på en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 17

Antall sider vedlegg: 0

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☒ **2-sidig** ☐

sort/hvit ☐ **farger** ☒

skal ha flervalgskjema ☐

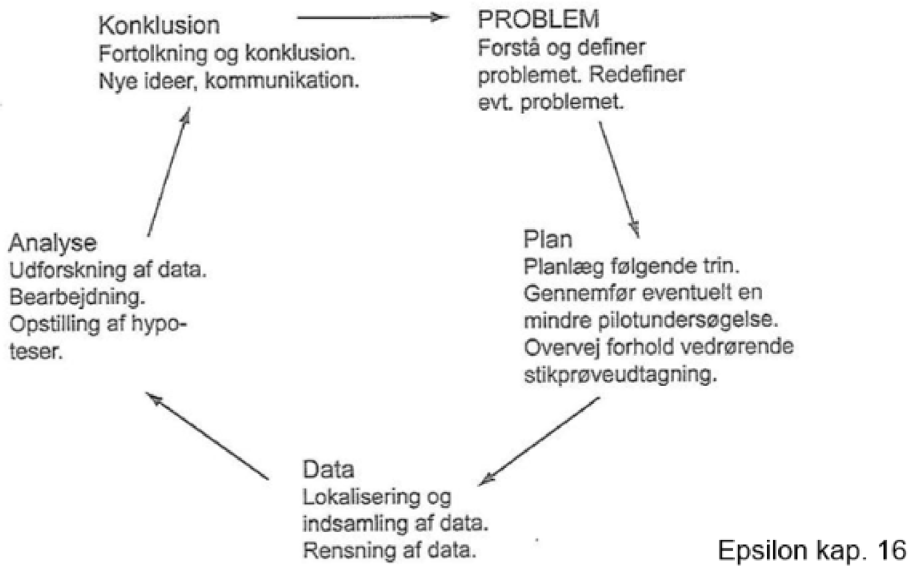
Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

Beskriv hvordan elever på ungdomstrinnet kan tilegne seg kunnskap om sentral- og spredningsmål gjennom arbeid med datadetektivens syklus. Skriv maksimalt én side.

Datadetektivens syklus er:



Sensurveiledning

Vurdering av besvarelsen vil legge vekt på at studenten:

- Viser pensumrelatert kunnskap om begrepene sentralmål og spredningmål.
- Formidler hensikten med å lære statistikk gjennom datadetektivens syklus (framfor tradisjonell undervisning).
- Formidler hva slags kunnskap man ønsker at elevene skal tilegne seg (læringsmål). For eksempel om ulike tolkninger av gjennomsnitt, eller forskjellen mellom ulike sentralmål.
- Gir eksempler på undersøkelser som er egnet for å arbeide med sentralmål og spredningsmål (for eksempel at man samler inn numeriske data).
- Gir konkrete eksempler for ulike steg i datadetektivens syklus, gjerne egne eksempler fra praksis.
- Belyser sammenhengen mellom to eller flere steg i syklusen, som hva som er målkunnskap, problemet som undersøkes, typen data som samles inn, typen analyse som velges, og/eller hva slags konklusjon man kan trekke.
- Drøfter utfordringer med å bruke datadetektivens syklus i undervisningen.

$\triangle$

Oppgave 2
Ta for deg følgende to datasett, som omhandler målinger av reaksjonstid.

Gruppe 1:

Elev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tid	12	12	10	19	18	13	21	28	12	28

Gruppe 2:

Elev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tid	12	12	19	16	15	17	15	18	17	17

a) Beregn hensiktsmessige sentral- og spredningsmål for begge datasettene og beskriv hva målene forteller.

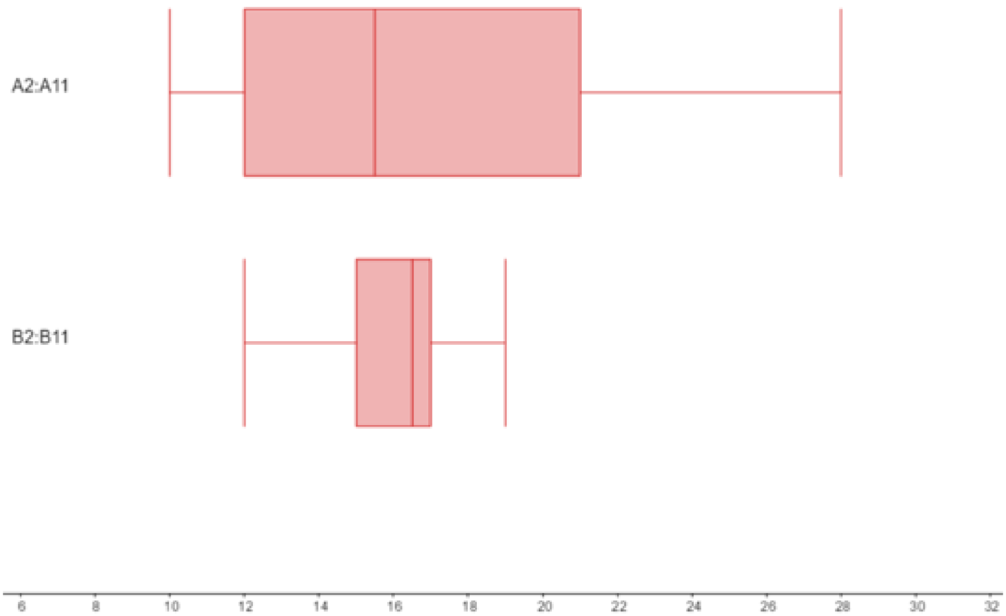
Sensurveiledning

	Gruppe 1	Gruppe 2
Gjennomsnitt	17,3	15,8
Median	15,5	16,5
Typetall	12	17
Variasjonsbredde	18	7
Kvartilbredde	9	2
Standardavvik	6,34	2,35

△

b) Bruk et boksplott som utgangspunkt for å sammenligne datasettene.

Sensurveiledning



Statistics

	n	Mean	σ	s	Min	Q1	Median	Q3	Max
A2:A11	10	17.3	6.3411	6.6841	10	12	15.5	21	28
B2:B11	10	15.8	2.2271	2.3476	12	15	16.5	17	19

△

Oppgave 3

Ludvig er på kino. Han har plukka med seg 10 lakrisbåter, 6 seigmenn og 4 Non Stop. Anta at alle lakrisbåtene er like, at alle seigmennene er like og at alle Non Stop-ene er like.

a) Ludvig mener at smaken på godteriet påvirkes av hvilket godteri han allerede har spist. Hvor mange forskjellige smakskombinasjoner er det mulig for Ludvig å få på de tre første bitene fra posen? Illustrer løsningen med en hensiktsmessig representasjon.

Sensurveiledning

Dette er et ordna utvalg uten tilbakelegging. På første bit har han tre muligheter. På andre bit er det også tre muligheter. Det er det også på tredje bit. Dermed blir det totalt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ smakskombinasjoner. Hensiktsmessige representasjoner kan for eksempel være valgtre/telletre/trediagram, skjematisk kart og liste over kombinasjonene. △

b) Hvor mange forskjellige rekkefølger er det når han skal spise alle bitene i posen?

Sensurveiledning

For hver av de $\binom{20}{10} = 184756$ plasseringene av de 10 lakrisbåtene på 20 plasser kan de 6 seigmennene plasseres på $\binom{10}{6} = 210$ plasser (det er 10 gjenværende plasser etter de 10 lakrisbåtene er plassert). Da må Non Stop-ene plasseres på de fire gjenværende plassene, noe som bare kan gjøres på én måte.

$$\binom{20}{10} \cdot \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{4} = 3879876$$

△

Oppgave 4

Emanuel er også på kino. Han er spesielt glad i bananer, og har derfor fått en pose med fem typer banangodteri. To av disse typene har sjokoladetrekk. De med sjokoladetrekk er skumbanan og krembanan, mens de uten sjokolade er supersure bananer, små bananer og salte bananer. I posen er det sju skumbananer, tre krembananer, åtte supersure bananer, ni små bananer og fire salte bananer. Emanuel liker ikke skumbanan og salte bananer, men tar likevel med alt godteriet inn i kinosalen.

a) I kinosalen er det mørkt, og Emanuel ser derfor ikke hvilken type banan han plukker fra posen. Sett opp utfallsrommet for det å trekke én banan fra posen, samt hendelsene "trekke en banan med sjokolade" (hendelse A) og "trekke en banan Emanuel ikke liker" (hendelse B).

Sensurveiledning

$$
\begin{aligned}
U &= \{\text{Skum, krem, supersur, små, salte}\} \\
A &= \{\text{Skum, krem}\} \\
B &= \{\text{Skum, salte}\}
\end{aligned}
$$

△

b) Sett opp en krysstabell med hendelsene A og B.

Sensurveiledning

	A	Ikke A	Totalt
B	7	4	11
Ikke B	3	17	20
Totalt	10	21	31

△

c) Hva betyr $P(A \cup B), P(A \cap B), P(A|B)$ og $P(B|A)$? Regn ut sannsynlighetene.

Sensurveiledning

$P(A \cup B)$; Sannsynligheten for å trekke sjokolade, trekke en Emanuel ikke liker, eller trekke både sjokolade og en som Emanuel ikke liker.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{31} + \frac{11}{31} - \frac{7}{31} = \frac{14}{31}$$

$P(A \cap B)$; Sannsynligheten for å trekke både sjokolade og en som Emanuel ikke liker.

$$P(A \cap B) = \frac{7}{31}$$

$P(A|B)$; Sannsynligheten for at den Emanuel trakk har sjokoladetrekk, gitt at han ikke liker den.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7/31}{11/31} = \frac{7}{11}$$

$P(B|A)$; Sannsynligheten for at den Emanuel trakk er en banan han ikke liker, gitt at den har sjokoladetrekk.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{7/31}{10/31} = \frac{7}{10}$$

△

d) Emanuel tok en supersur banan som sin første banan i kinosalen. Hva er sannsynligheten for at også de to neste bananene han tar opp av posen er bananer han liker? Finn sannsynligheten på to forskjellige måter.

Sensurveiledning

La C være følgende hendelse: De to neste bananene han trekker er også bananer han liker. Da er:

$$P(C) = \frac{19}{30} \cdot \frac{18}{29} = \frac{57}{145} \approx 0.393$$

Kan også se på hendelsene "liker første, liker ikke andre", "liker ikke første, liker andre", "liker ikke første, liker ikke andre":

$$P(C) = 1 - \left(\frac{19}{30} \cdot \frac{11}{29} + \frac{11}{30} \cdot \frac{19}{29} + \frac{11}{30} \cdot \frac{10}{29} \right) = \frac{57}{145} \approx 0.393$$

△

Oppgave 5

En gruppe elever leker en lek som kalles «gul bil». Leken er at den som ser en gul bil først skal slå de andre (ikke hardt, da). La X = antall gule biler elevene har sett når 20 biler har kjørt forbi dem. Elevene har fra tidligere funnet ut at rundt 20% av bilene de ser er gule.

a) Begrunn hvorfor det er rimelig å hevde at X er tilnærmet binomisk fordelt.

Sensurveiledning

Vi ser på de tre forutsetningene for binomiske fordelinger:

1. X har $n = 20$ uavhengige delforsøk.
2. Det er to hendelser: Suksess (gul bil) eller ikke-suksess (ikke gul bil).
3. Sannsynligheten for gul bil er ca. den samme hele tiden, nemlig $p = 0.2 = 1/5$. Sannsynligheten for ikke gul bil er derfor $1 - 0.2 = 0.8 = 4/5$.

△

b) Hva er sannsynligheten at de ser mer enn 3 gule biler? Her kan du ta utgangspunkt i at sannsynligheten for at en tilfeldig bil er gul er $p = 0,2$.

Sensurveiledning

Siden X er binomisk fordelt har vi at:

$$P(X = k) = \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k}$$

Vi ønsker å finne sannsynligheten for å se mer enn 3 guler biler. Istedenfor å legge sammen $P(X = 4) + P(X = 5) + \cdots + P(X = 20)$ kan vi se på komplementærhendelsen, siden

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

Vi må fortsatt regne ut $P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2)$ og $P(X = 3)$, men dette er betydelig mindre arbeid.

$$P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20} \approx 0.0115$$

$$P(X = 1) = \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{19} \approx 0.0576$$

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0.1386$$

$$P(X = 3) = \binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{17} \approx 0.2054$$

Det følger at:

$$P(X \leq 3) \approx 0.0115 + 0.0576 + 0.1386 + 0.2054 = 0.4131$$

og derfor at

$$P(X > 3) \approx 1 - 0.4131 = 0.5869$$

△

c) En lærer med noe bakgrunn i statistikk ønsker å teste:

$$H_0: \quad p = 1/5$$
$$H_1: \quad p \neq 1/5$$

Forklar hva hypotesene uttrykker.

Sensurveiledning

Nullhypotesen er at sannsynligheten for å se en gul bil faktisk er $p = 1/5$. Den alternative hypotesen kan vi tolke som at læreren er usikker på om dette faktisk er tilfellet. Læreren vet derimot ikke om det er flere eller færre gule biler enn det elevene hevder, så læreren setter opp en tosidet hypotesetest. Alternativhypotesen er derfor formulert som $p \neq 1/5$. For å gjennomføre testen må vi derfor teste begge ulikhetene: $p > 1/5$ og $p < 1/5$ for å finne to grenseverdier med en godkjent toleranse for å gjøre en type 1-feil, altså å forkaste H_0 feilaktig. △

d) Velg signifikansnivå 5%, og finn kritisk verdi for testen hvis man totalt observerer 50 biler.

Sensurveiledning

Vi starter alltid hypotesetesten med å anta H_0, altså at $p = 1/5$. Vi skal se om dette fører til noe urimelig. Her er signifikansnivået $\alpha = 0.05$. Vi fordeler disse 5% på hver side, siden vi har en tosidet hypotesetest og ønsker å finne kritiske verdier g_1 og g_2 slik at:

$$P\left(X \leq g_1 \,|\, p = \frac{1}{5}\right) < 0.025$$

$$P\left(X \geq g_2 \,|\, p = \frac{1}{5}\right) < 0.025$$

Elevene har observert $n = 50$ biler så her er det rimelig å tilnærme X med en normalfordeling. Vi må derfor ha et gjennomsnitt μ og en varians σ^2:

$$\mu = E[X] = n \cdot p = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 50 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 8$$

Her har vi benyttet oss av nullhypotesen til å kunne si at $p = 1/5$. Vi tilnærmer derfor X med fordelingen $\mathcal{N}(10, 8)$. Siden vi har brukt at $p = 1/5$ trenger vi ikke lenger å ha dette med som en betinget sannsynlighet. Videre bruker vi også Yates korreksjon slik at vi ser på sannsynlighetene:

$$P\left(X \leq g_1 + 0.5\right) < 0.025$$

$$P\left(X \geq g_2 - 0.5\right) < 0.025$$

Vi gjør om til standardnormalfordeling:

$$\begin{aligned}
P\left(X \geq g_2 - 0.5\right) &= 1 - P\left(X \leq g_2 - 0.5\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{X - 10}{\sqrt{8}} \leq \frac{g_2 - 0.5 - 10}{\sqrt{8}}\right) \\
&= 1 - P\left(Z \leq \frac{g_2 - 10.5}{\sqrt{8}}\right) < 0.025
\end{aligned}$$

Siden normalfordelingen er symmetrisk så er siste linje det samme som å si at:

$$P\left(Z \leq \frac{g_2 - 10.5}{\sqrt{8}}\right) < 0.975$$

som fra tabellen betyr at

$$\frac{g_2 - 10.5}{\sqrt{8}} = 1.96 \Leftrightarrow g_2 = 16.04$$

Tilsvarende har vi:

$$\begin{aligned}
P\left(X \leq g_1 + 0.5\right) &= P\left(\frac{X - 10}{\sqrt{8}} \leq \frac{g_1 + 0.5 - 10}{\sqrt{8}}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{g_1 - 9.5}{\sqrt{8}}\right) < 0.025
\end{aligned}$$

Som er det samme som

$$P\left(Z \leq -\frac{g_1 - 9.5}{\sqrt{8}}\right) < 0.975$$

Som fra tabellen betyr at:

$$-\frac{g_1 - 9.5}{\sqrt{8}} = 1.96 \Leftrightarrow g_1 = 3.96$$

△

Oppgave 6

Etter flere års erfaring har en statistikklærer ved NTNU funnet ut at poengsummen X ved statistikkeksamen til en tilfeldig student er normalfordelt med $\mu = 62$ og $\sigma = 15$. Poengskalaen er fra og med 0 til og med 100.

a) Finn $P(50 < X < 82)$ og gi en tolkning av svaret.

Sensurveiledning

$$\begin{aligned} P\left(50 < X < 82\right) &= P\left(\frac{50-62}{15} < \frac{X-62}{15} < \frac{82-62}{15}\right) \\ &= P\left(-0.8 < Z < 1.33\right) \\ &= P(Z < 1.33) - P(Z > -0.8) \\ &= P(Z < 1.33) - (1 - P(Z < -0.8)) \\ &= 0.9082 - (1 - 0.7881) = 0.6963 \end{aligned}$$

Dette betyr at sannsynligheten for at en tilfeldig student får mellom 50 og 82 poeng på eksamen er ca 69.63%. △

b) For at en student skal bestå, må poengsummen på eksamen være over 40. Regn ut sannsynligheten for at en tilfeldig student består.

Sensurveiledning

Vi ser altså på $P(X > 40)$. Vi har da:

$$\begin{aligned} P\left(X > 40\right) &= P\left(\frac{X-62}{15} > \frac{40-62}{15}\right) \\ &= P\left(Z > -1.47\right) \\ &= P(Z < 1.47) = 0.9292 \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig student består eksamen er derfor ca. 92.92%.

△

Dette året har læreren hatt en god følelse etter undervisningen og mistenker at dette årets gjennomsnitt vil være høyere. Læreren har tatt et tilfeldig utvalg på 13 besvarelser i statistikkurset og funnet følgende:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	63	85	59	58	60	64	75	92	82	68	46	96	66

c) Bruk tabellen over til å finne et punktestimat for dette årets gjennomsnittspoengsum. Forklar hvordan du kunne regnet deg frem til at $\hat{\sigma} = 14.7161$.

Sensurveiledning

Punktestimatet for gjennomsnittet er $\hat{\mu} = 70.3077$. Punktestimatet for standardavviket $\hat{\sigma}$ er gitt ved:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{13}(x_i - \hat{\mu})^2} = 14.7161$$

△

d) Finn et (tilnærmet) 90%-konfidensintervall for årets gjennomsnitt μ^* basert på tallene ovenfor. Har læreren grunn til å tro at gjennomsnittet er høyere enn tidligere år?

Sensurveiledning

Siden vi ikke kjenner populasjonsstandardavviket bruker vi estimatet for σ, nemlig $\hat{\sigma} = 14.7161$. Intervallet blir derfor ikke et ekte 90%-konfidensintervall, men noe som er tilnærmet 90%. Intervallet er da gitt ved:

$$\left[\hat{\mu} - 1.645 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{13}}, \hat{\mu} + 1.645 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{13}}\right]$$

Legg merke til at vi her bruker sentralgrenseteoremet for å si at fordelingen til utvalgsgjennomsnittet er normalfordelt med gjennomsnitt μ og (ca.) varians $\hat{\sigma}^2/13$. Dette er trolig OK, selv om $n = 13$ er noe lavt, siden vi ser på et utvalg fra en fordeling som allerede er normalfordelt.

Vi regner ut:

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{\mu} - 1.645 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{13}}, \hat{\mu} + 1.645 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{13}}\right] \\
=&\left[70.31 - 1.645 \cdot \frac{14.71}{\sqrt{13}}, 70.31 + 1.645 \cdot \frac{14.71}{\sqrt{13}}\right] \\
=&[70.31 - 6.71, 70.31 + 6.71] \\
=&[63.60, 77.02]
\end{aligned}$$

Siden det gamle gjennomsnittet på 62 faller utenfor dette intervallet, er det grunn til å tro at det er en liten forbedring fra tidligere år. Men med et konfidensintervall på 90% kan det også bare være at læreren var heldig med utvalget sitt. △

Oppgave 7
Jones m. fl. (1999) undersøkte forståelsen for sannsynlighet hos elever i en 3.-klasse. De fire nivåene i elevenes tenkning er:

1. Subjektiv sannsynlighetstenkning.
2. Overgang fra subjektiv til naivt kvantitativ sannsynlighetstenkning.
3. Uformell kvantitativ tenkning om sannsynligheter.
4. Numerisk sannsynlighetstenkning.

a) Beskriv hva som karakteriserer de fire nivåene.

Sensurveiledning

Studenten burde kunne gjengi de viktigste punktene for hvert av nivåene.

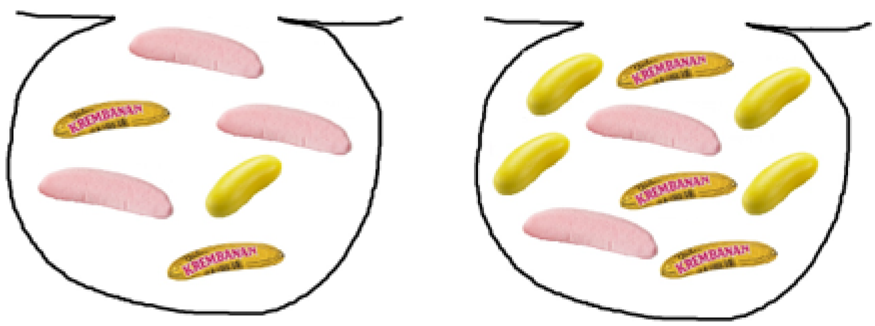
- Nivå 1: Elevens tankegang er smal, og er konsistent bundet til subjektiv resonnering. (Eks: "Jeg tror rød vinner, fordi rød er min favorittfarge").
- Nivå 2: Eleven gir uttrykk for forståelse for at kvalitative mål er viktig. (Eks: Eleven kan notere utfallene for en-stegs eksperiment. Eleven klarer noen ganger å notere utfallene for to-stegs eksperiment ved å bruke begrensede og usystematiske strategier. En elev på dette nivået vil, for eksempel, kunne notere utfallsrommet for et terningkast. I et eksperiment med to terningkast, derimot, vil eleven (ofte) notere mulige utfall på en usystematisk måte (f.eks 1-2, 3-4, 5-6, 1-6, 4-3, ...), og dermed ikke klare å fylle hele utfallsrommet).
- Nivå 3: Elever på dette nivået bruker vanligvis kvalitativ resonnering når de jobber med oppgaver.(Eks: Tenkningen kommer til uttrykk gjennom mer generaliserte strategier for å liste opp utfallsrom ved to-stegs forsøk).
- Nivå 4: Elever på nivå fire klarer å trekke presise konklusjoner om utfallsrom, utfall og deres tilhørende sannsynligheter.

Se Jones et al. (1999) s. 490-492 for detaljert beskrivelse av de fire nivåene.

△

Elever i femte klasse jobber med følgende oppgave:

«Se på bildet under. Hvis Emanuel skal trekke én banan fra én av posene, hvilken pose gir størst sannsynlighet for å trekke krembanan?»



Fem elevbesvarelser er gjengitt under:

Solan: Sannsynligheten for å trekke en krembanan er mindre i posen til venstre fordi det er flere rosa bananer enn krembananer der. I posen til høyre er det flere krembananer enn rosa bananer.

Arun: Det er like stor sjanse. Forholdet mellom krembanan og det totale antall bananer i hver av posene er likt.

Oliane: I posen til høyre er tre av ni biter krembanan. I posen til venstre er to av seks biter krembanan. Sannsynligheten for å trekke en krembanan er lik i de to posene fordi to seksdeler er lik en tredjedel, som også er det samme som tre nideler.

Ollvar: Sjansen er størst i den til høyre fordi det er flest krembananer, som er den biten jeg liker best, i posen til høyre.

Aurikla: Det er størst sjanse i posen til venstre fordi det er færrest biter som ikke er krembanan i den posen.

b) Vurder hvilket av Jones m. fl. nivåer elevene tenker på i besvarelsen av oppgaven. Begrunn svaret ditt.

Sensurveiledning

Solan: 2

Arun: 3/4

Oliane: 4

Ollvar: 1

Aurikla: 2

Utover dette forventes det en forklaring av hvorfor studenten er plassert under det aktuelle nivået. △