NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for lærerutdanning

Eksamensoppgave i
MGLU2503 MATEMATIKK 2 (5-10), EMNE 2

Faglig kontakt under eksamen: Line S. R. Eide[a], Øyvind H. Lien[b], Solomon A. Tesfamicael[c]

Tlf: [a]482 45 253 , [b]995 91 836 , [c]464 48 786

Eksamensdato: 24. mai 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 15:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Den endelige karakteren vil bygge på en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 4

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Orginalen er:	
1-sidig ☒	**2-sidig** ☐
sort/hvit ☐	**farger** ☒
skal ha flervalgskjema ☐	

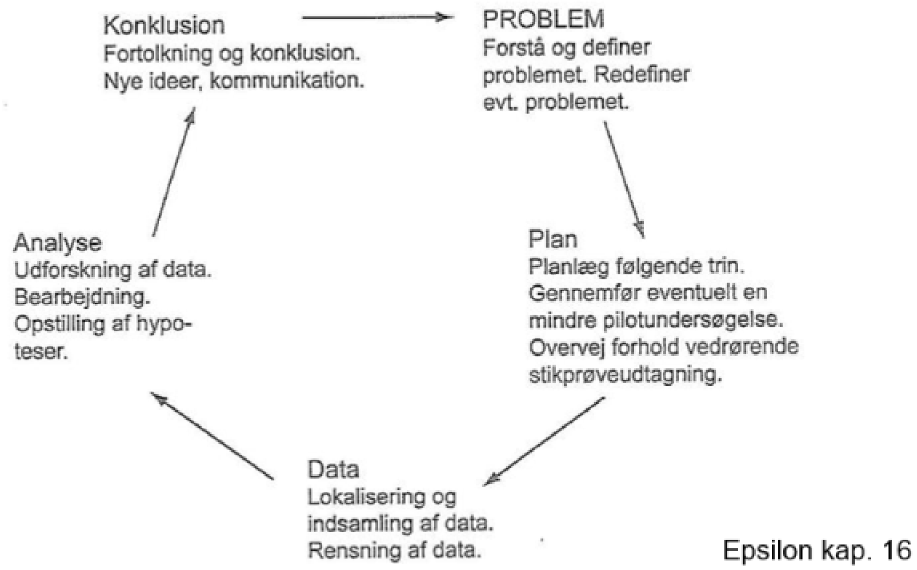
Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

Beskriv hvordan elever på ungdomstrinnet kan tilegne seg kunnskap om sentral- og spredningsmål gjennom arbeid med datadetektivens syklus. Skriv maksimalt én side.

Datadetektivens syklus er:



Oppgave 2
Ta for deg følgende to datasett, som omhandler målinger av reaksjonstid.

Gruppe 1:

Elev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tid	12	12	10	19	18	13	21	28	12	28

Gruppe 2:

Elev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tid	12	12	19	16	15	17	15	18	17	17

a) Beregn hensiktsmessige sentral- og spredningsmål for begge datasettene og beskriv hva målene forteller.

b) Bruk et boksplott som utgangspunkt for å sammenligne datasettene.

Oppgave 3

Ludvig er på kino. Han har plukka med seg 10 lakrisbåter, 6 seigmenn og 4 Non Stop. Anta at alle lakrisbåtene er like, at alle seigmennene er like og at alle Non Stop-ene er like.

a) Ludvig mener at smaken på godteriet påvirkes av hvilket godteri han allerede har spist. Hvor mange forskjellige smakskombinasjoner er det mulig for Ludvig å få på de tre første bitene fra posen? Illustrer løsningen med en hensiktsmessig representasjon.

b) Hvor mange forskjellige rekkefølger er det når han skal spise alle bitene i posen?

Oppgave 4

Emanuel er også på kino. Han er spesielt glad i bananer, og har derfor fått en pose med fem typer banangodteri. To av disse typene har sjokoladetrekk. De med sjokoladetrekk er skumbanan og krembanan, mens de uten sjokolade er supersure bananer, små bananer og salte bananer. I posen er det sju skumbananer, tre krembananer, åtte supersure bananer, ni små bananer og fire salte bananer. Emanuel liker ikke skumbanan og salte bana-ner, men tar likevel med alt godteriet inn i kinosalen.

a) I kinosalen er det mørkt, og Emanuel ser derfor ikke hvilken type banan han plukker fra posen. Sett opp utfallsrommet for det å trekke én banan fra posen, samt hendelsene "trekke en banan med sjokolade" (hendelse A) og "trekke en banan Emanuel ikke liker" (hendelse B).

b) Sett opp en krysstabell med hendelsene A og B.

c) Hva betyr $P(A \cup B), P(A \cap B), P(A|B)$ og $P(B|A)$? Regn ut sannsynlighetene.

d) Emanuel tok en supersur banan som sin første banan i kinosalen. Hva er sannsyn-ligheten for at også de to neste bananene han tar opp av posen er bananer han liker? Finn sannsynligheten på to forskjellige måter.

Oppgave 5
En gruppe elever leker et spill som kalles «gul bil». Leken er at den som ser en gul bil først skal slå de andre (ikke hardt, da). La X = antall gule biler elevene har sett når 20 biler har kjørt forbi dem. Elevene har fra tidligere funnet ut at rundt 20% av bilene de ser er gule.

a) Begrunn hvorfor det er rimelig å hevde at X er tilnærmet binomisk fordelt.

b) Hva er sannsynligheten at de ser mer enn 3 gule biler? Her kan du ta utgangspunkt i at sannsynligheten for at én tilfeldig bil er gul er nøyaktig 20%.

c) En lærer med noe bakgrunn i statistikk ønsker å teste:

$$\begin{aligned} H_0: &\quad p = 1/5 \\ H_1: &\quad p \neq 1/5 \end{aligned}$$

Forklar hva hypotesene uttrykker.

d) Velg signifikansnivå 5%, og finn kritisk verdi for testen hvis man totalt observerer 50 biler.

Oppgave 6
Etter flere års erfaring har en statistikklærer ved NTNU funnet ut at poengsummen X ved statistikkeksamen til en tilfeldig student er normalfordelt med $\mu = 62$ og $\sigma = 15$. Poengskalaen er fra og med 0 til og med 100.

a) Finn $P(50 < X < 82)$ og forklar hva dette betyr.

b) For at en student skal bestå må besvarelsen oppnå minst 40 poeng. Finn sannsynligheten for at tilfeldig student består.

Dette året har læreren hatt en god følelse etter undervisningen og mistenker at dette årets gjennomsnitt vil være høyere. Læreren har tatt et tilfeldig utvalg på 13 besvarelser i statistikkurset og funnet følgende:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	63	85	59	58	60	64	75	92	82	68	46	96	66

c) Bruk tabellen over til å finne et punktestimat for dette årets gjennomsnittspoengsum. Forklar også hvordan du kunne regnet deg frem til at $\hat{\sigma} = 14.7161$.

d) Finn et (tilnærmet) 90%-konfidensintervall for årets gjennomsnitt μ^* basert på tallene ovenfor. Har læreren grunn til å tro at snittet er høyere enn tidligere år?

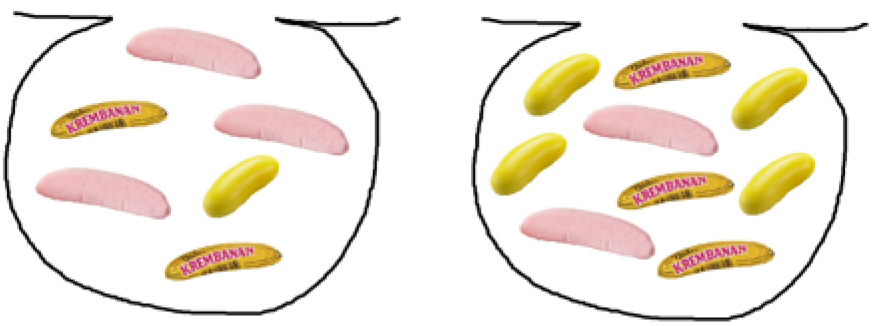
Oppgave 7
Jones m. fl. (1999) undersøkte forståelsen for sannsynlighet hos elever i en 3.-klasse. De fire nivåene i elevenes tenkning er:

1. Subjektiv sannsynlighetstenkning.
2. Overgang fra subjektiv til naivt kvantitativ sannsynlighetstenkning.
3. Uformell kvantitativ tenkning om sannsynligheter.
4. Numerisk sannsynlighetstenkning.

a) Beskriv hva som karakteriserer de fire nivåene.

Elever i femte klasse jobber med følgende oppgave:

«Se på bildet under. Hvis Emanuel skal trekke én banan fra én av posene, hvilken pose gir størst sannsynlighet for å trekke krembanan?»



Fem elevbesvarelser er gjengitt under:

Solan: Sannsynligheten for å trekke en krembanan er mindre i posen til venstre fordi det er flere rosa bananer enn krembananer der. I posen til høyre er det flere krembananer enn rosa bananer.

Arun: Det er like stor sjanse. Forholdet mellom krembanan og det totale antall bana-ner i hver av posene er likt.

Oliane: I posen til høyre er tre av ni biter krembanan. I posen til venstre er to av seks biter krembanan. Sannsynligheten for å trekke en krembanan er lik i de to posene fordi to seksdeler er lik en tredjedel, som også er det samme som tre nideler.

Ollvar: Sjansen er størst i den til høyre fordi det er flest krembananer, som er den bi-ten jeg liker best, i posen til høyre.

Aurikla: Det er størst sjanse i posen til venstre fordi det er færrest biter som ikke er krembanan i den posen.

b) Vurder hvilket av Jones m. fl. nivåer elevene tenker på i besvarelsen av oppgaven. Begrunn svaret ditt.

Vedlegg 1
Formelark for sannsynlighetsregning og statistikk

Binomialkoeffisient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Addisjonssetningen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Definisjon av betinget sannsynlighet

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bayes' formel

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$

Standardavvik og gjennomsnittlig absoluttavvik

La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være observasjonene i et datasett, og $\bar{x}$ gjennomsnittet av dem. Nedenfor er det gitt tre formler:

1. Empirisk standardavvik.
2. Teoretisk standardavvik.
3. Gjennomsnittlig absoluttavvik.

1. $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ 2. $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ 3. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$

Forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel X

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{\text{alle } x_i} x_i \cdot P(X = x_i)$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = \sum_{\text{alle } x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Hypergeometrisk fordeling

$$P(X = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad \mathrm{E}(X) = n \cdot p, \qquad \mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

der $p = {}^{S}/{}_{N}$.

Binomisk fordeling

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad \mathrm{E}(X) = n \cdot p, \qquad \mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Normalfordelinger

Dersom X er normalfordelt med forventning μ og varians σ^2, så er

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

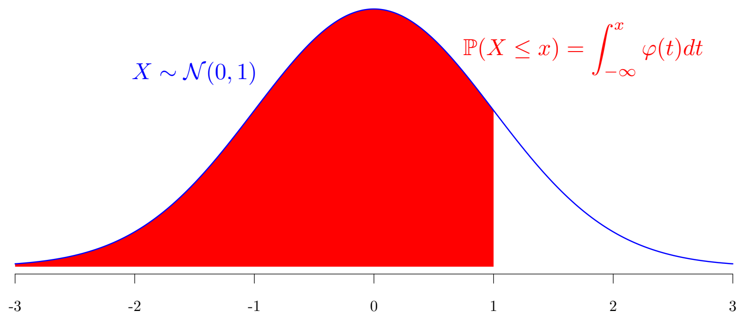
normalfordelt med forventning 0 og varians 1.

Sentralgrenseteoremet

Dersom $\bar{X}$ er gjennomsnittet av n uavhengige observasjoner hentet fra en normalfordelt populasjon med forventning μ og varians σ^2, da er Z normalfordelt med forventning 0 og varians 1 der

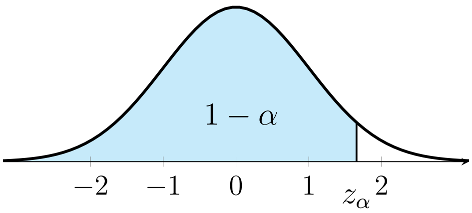
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Vedlegg 2
Standard normalfordeling



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Vedlegg 3
Signifikansnivåer og z-verdier



α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
2α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
$1-2\alpha$	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99
z_α	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58