Institutt for lærerutdanning

Sensurveiledning

MGLU1503+LGU51014, MATEMATIKK 1 (5-10), EMNE 1

Eksamensdato: Mandag 18. desember 2017

Eksamenstid: 09:00-15:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:
Tillatte hjelpemidler er vanlige skrivesaker og valgfri utgave av LK06. I tillegg kan kandidaten medbringe ett A4-ark med egne notater på begge sider.

Annen informasjon:
Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Den endelige karakteren vil bygge på en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (uten forside): 3

Antall sider vedlegg: 0

Oppgave 1

a) Løs multiplikasjonsstykket $1{,}25 \cdot 0{,}16$ på to ulike måter som ikke tar i bruk standardalgoritmen for multiplikasjon. Vis og forklar fremgangsmåten din.

Denne oppgaven kan løses på ulike måter. Man kan benytte den distributive egenskapen ved multiplikasjon og regne ut (1+0,25)·0,16. Vi kan videre benytte vennlige tall, for eksempel ved at det å multiplisere med 0,25 er det samme som å dividere med 4, og en firedel av 0,16 er 0.04. (1+0,25)·0,16=1·0,16 + 0,25·0,16 = 0,16+0,04=0,2.

En annen strategi er å tenke at 0,16 skal multipliseres med en hel og en kvart. En kvart av 0,16 er 0,04, slik at svaret må bli 0,04 mer enn 1·0,16, altså 0,2. Den samme strategien kan synliggjøres på en tallinje ved for eksempel å ta en firedel av 16 millimeter som legges til 16 millimeter.

Dobling og halvering/assosiativitet er en effektiv strategi her, og vi benytter omvendt proporsjonalitet med hensyn til multiplikand og multiplikator: 1,25·0,16 = 2,5·0,08 = 5·0,04 = 10·0,02=0,2

b) I en 7.klasse har de om prosentregning, og de arbeider med problemstillingen;

En butikk har følgende prissetting til Black-Friday; to dager før Black-Friday setter de opp prisen på en vare med 25%, og på selve Black-Friday setter de så ned igjen prisen på varen med 25%. Når er varen billigst?

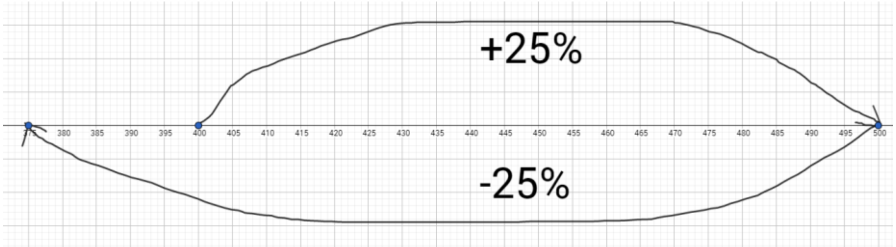
Siri påstår at det billigste er å kjøpe varen før prisen blir satt opp, altså minst tre dager før Black-Friday-salget, mens Per mener det må være billigst å kjøpe varen på Black-Friday-salget.

Utarbeid en undervisningsforklaring som kan hjelpe Siri og Per til å få en klarhet i når varen er billigst.

For at en undervisningsforklaring skal være meningsfull og enkel å forstå kan man godt benytte konkrete tall for å vise at man ikke tar 25% av samme mengde når prisen øker og synker. Tallene som benyttes bør være slik at hoderegning kan benyttes.

Anta at utgangsprisen er kr. 400 for en bukse, så øker prisen med 25% til kr. 500. 25% avslag av dette er kr. 125. Altså blir prisen på buksen kr. 375 på Black-Friday. Det sentrale er å vise at 25% av 400 og 25% av 500 ikke er like mye, og at det faktisk er to forskjellige priser man tar utgangspunkt i utregningene. To trinn i denne prosessen må komme tydelig fram: 1) Regneoperasjonen og involverte tallstørrelser mellom utgangsprisen og prisen etter økningen, og 2) regneoperasjonen og involverte tallstørrelser mellom den økte prisen og prisen etter avslaget på Black-Friday.

Dette kan representeres på en tallinje:

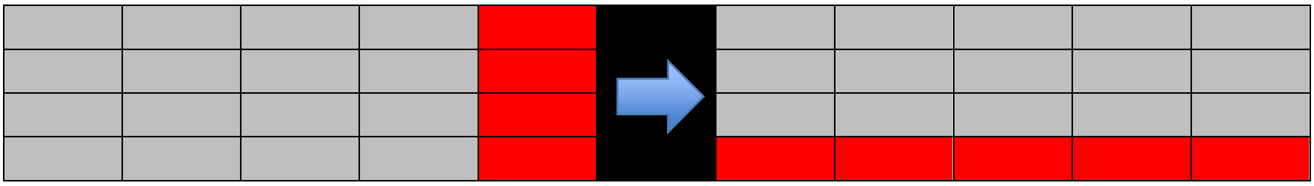


En arealmodell med de nevnte tallene kan se slik ut:

<table>
<tr><td rowspan="4">100</td><td rowspan="4">100</td><td rowspan="4">100</td><td rowspan="4">100</td><td rowspan="4">+100</td><td rowspan="4"></td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr>
<tr><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr>
<tr><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr>
<tr><td>-25</td><td>-25</td><td>-25</td><td>-25</td><td>-25</td></tr>
</table>

Her ser vi at 400+100=500, og at 500-125=375. Først blir det lagt til 25% og etterpå trukket fra 25%. Dette synliggjøres da 25% er en firedel av de grå områdene.

Generelt kan det illustreres slik:



Det grå området blir mindre.

c) Gjør rede for hva som kjennetegner en god undervisningsforklaring i matematikk og diskuter om forklaringen din fra b) oppfyller kriteriene for en undervisningsforklaring.

Det er enkelte sentrale kjennetegn på en god undervisningsforklaring. Den skal være meningsfull og enkel å forstå, definere nøkkelbegrep på en hensiktsmessig måte, bygge på og belyse matematiske ideer, forklarer tankeprosessen steg for steg uten hopp, gjør overgangen mellom hvert steg tydelig, bruker et språk som er tilpasset eleven. Det skal velges egnede eksempler og representasjoner og sammenhengen mellom representasjoner og begreper, samt klargjør spørsmålet og viser hvordan svaret fremkommer.

Det skal i tillegg settes i sammenheng med egen forklaring på punkt b). En god besvarelse vil da bruke egen forklaringen i b) til å diskutere hva de 7 kriteriene for en undervisningsforklaring betyr.

Oppgave 2

På TIMMS-undersøkelsen i 2007 skulle 8. klassinger svare på en oppgave der de fikk fire svaralternativer, a), b), c) og d) gitt under, og der elevene skulle svare ved å sette en ring rundt det svaret de mener er riktig. Oppgaven var å finne summen av de tre brøkene $\frac{2}{5}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}$.

$a)\ \frac{16}{17}$ $b)\ \frac{41}{40}$ $c)\ \frac{81}{40}$ $d)\ \frac{111}{40}$

a) 25% av de norske elevene hadde korrekt svar. Hva kan være årsaken til at en elev mener at $\frac{16}{17}$ er det riktige svaret?
Her vil det vere aktuelt å tenke på overgeneralisering av heiltalsoperasjonar. Om ein legger saman teljarane får ein 16, og om ein legger saman nemnarane får ein 17. Dette er ein typisk overgeneralisering av addisjon av heile tal. Eleven har gjerne ikkje eit godt nok utvikla brøkbegrep, og behandlar difor teljar og nemnar separat som heile tal. I så måte er det naturleg å tenke at addisjon av brøk skjer ved å legge saman teljarane for seg og nemnarane for seg.

b) Løs oppgaven uten å benytte desimaltall eller fellesnevner. Begrunn hvordan du kom fram til svaret.
Her kan ein bruke fleire strategiar, men eit døme kan vere følgande;
Brøken $\frac{5}{4}$ er litt over ein heil, det samme er brøken $\frac{9}{8}$. Desse to brøkane til saman er difor litt over to heile. Brøken $\frac{2}{5}$ er litt under ein halv, og dermed er summen til saman ca to og ein halv. Vi har no gjort eit overslag av kva summen blir. Vi må då vurder dei ulike svaralternativa som er gitt. Brøken $\frac{16}{17}$ er mindre enn ein heil, og kan dermed ikkje vere stor nok til å vere svaret. Brøken $\frac{41}{40}$ er rett over ein heil, er heller ikkje stor nok. Brøken $\frac{81}{40}$ er rett over to heile, medan i brøken $\frac{111}{40}$ er tellaren ca 2,5 gonger større enn nemnaren. Brøken representerer dermed det samme forholdet som summen av dei tre brøkane.

c) Sammenlign brøkene under, og oppgi svaret i stigende rekkefølge. Du skal argumentere for løsningen din uten å bruke fellesnevner, uten å gjøre om til desimaltall og uten å basere argumentasjonen på en tegning alene.

$$\frac{5}{12} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{6}{11}$$

Det er lett å se at $\frac{5}{12} < \frac{5}{9}$, fordi begge består av fem deler, men en nidel er større enn en tolvdel (dette må nevnes). Videre er det naturlig å samanlikne brøkene med $\frac{1}{2}$, siden alle tre er ganske nær denne. Vi ser at $\frac{5}{12}$ er den eneste av de tre brøkene som er mindre enn $\frac{1}{2}$, så den er altså minst av de tre. Da trengs bare å sammenlikne de to andre brøkene.

Vi ser at $\frac{5}{9}$ er *en halv nidel* større enn $\frac{1}{2}$, mens $\frac{6}{11}$ er *en halv ellevedel* større enn $\frac{1}{2}$. Siden nideler er større enn ellevedeler, er en halv nidel større enn en halv ellevedel. Dermed er $\frac{5}{9}$ større enn $\frac{6}{11}$, og vi ender opp med følgende ordning av brøkene:

$$\frac{5}{12} < \frac{6}{11} < \frac{5}{9}$$

På denne oppgaven er kriteriene for hva som kreves klart gitt i formuleringen av oppgaven. Noen vil sikkert likevel ha gjort en blanding, f.eks. først skilt ut $\frac{5}{12}$ som den minste av brøkene og deretter bruke fellesnevner for å sammenlikne de to siste. Det kan også være noen som utvider brøkene for å lage felles teller, eller utvider brøkene for å lage «hele deler» (f.eks. en attendel istedenfor en halv nidel). Det er greit, så lenge det argumenteres for hvorfor brøkene er ekvivalente. Merk at å bruke fellesnevner alene som argument ikke vil gi uttelling på denne oppgaven.

d) Hva sier faglitteraturen om hvorfor det kan være hensiktsmessig å arbeide med å sammenligne brøker i skolematematikken?

Når man begynner å arbeide med brøk i skolen så betyr det at elevenes tallforståelse må utvides til også å integrere en forståelse av tall som er brøker og hvordan man kan operere på slike tall. Elevene har allerede arbeidet mye i skolen med å utvikle aspekt ved tallforståelse knyttet til hele tall. Det å sammenligne brøker kan bidra til at elever får ein forståelse av det inverse forholdet mellom antall biter en enhet blir delt i og størrelsen på bitene. Det å sammenligne brøk krever at man arbeider med den relative størrelsen av en brøk, og at strategier basert på erfaringer med hele tall må forlates. S. 389-391 van de Walle.

Oppgave 3

Bente på 9. trinn påstår at 401 er et primtall og har tre grunner til dette:

1. Tverrsummen 4+0+1=5, og 5 kan ikke deles på tre
2. 401er et oddetall
3. Tallet slutter på 01

a) Kan Bente ut i fra de tre punktene bestemme om 401 er et primtall? Ta for deg hvert av punktene og kommenter hvilken informasjon du kan få fra hvert punkt.

I besvarelsen bør alle tre påstandene være drøftet med tanke på hva de forteller oss om tallet 401:

1. Siden tverrsummen ikke er delelig på 3, kan vi slå fast at 3 ikke er en divisor i 401. Tverrsummen er da heller ikke delelig på 9, så 9 er heller ingen divisor i tallet. Ingen multipler av 3 eller 9 vil da være divisorer i 401.
2. Siden 401 er et oddetall, kan vi slå fast at 2 ikke er en divisor i tallet. Da vil heller ingen multipler av 2 være divisorer i tallet.
3. Siden tallet slutter på 01, vet vi at ingen multipler av 2 eller 5 vil være divisorer i tallet. Tall som er delelig på 2 slutter på 0,2,4,6 eller 8, mens tall som er delelig på 5 slutter på 0 eller 5.

På bakgrunn av de tre påstandene kan ikke Bente slå fast at 401 er et primtall. Bente har ikke sjekket alle mulige divisorer i tallet, og derfor kan det fortsatt være noen divisorer i 401 som er forskjellig fra 1 og 401. Blant annet vet hun ikke om tallet er delelig på 7, 11, 13, 17 og 19. Dette bør komme frem i besvarelsen på denne oppgaven.

b) Hvordan kan du, med minst mulig arbeid, finne ut om 401 er et primtall eller ikke? Du trenger ikke å faktisk finne ut om 401 er et primtall, men du må forklare og begrunne hvilke strategier du kan benytte for å sjekke dette.

I besvarelsen må man kunne beskrive en metode for å sjekke om 401 er et primtall. Det kan gjøres på flere mulige måter, noen mer arbeidskrevende enn andre. Noen metoder vil derfor gi mer uttelling enn andre. For full uttelling er det viktig å nevne at man kun trenger å sjekke tallene opp til rota av 401. Noen metoder som kan benyttes:

- Ta utgangspunkt i Bentes tre påstander i tillegg til å teste om 401 er delelig på 7, 11, 13, 17 og 19 (svaret må være et helt tall hvis vi skal si at tallet er en divisor i 401).
- Dele 401 på alle tall mellom 2 og 21 for å se om det gir et heltallssvar.
- Benytte Eratostenes metode (Eratostenes primtallssil). I denne metoden siles alle sammensatte tall ut på en systematisk måte, og tallene som står igjen er primtall. Man starter med å skrive opp alle tall fra 2 og opp til 401. Først siles alle multipler av 2 ut, bortsett fra 2 selv. Deretter siles alle multipler av 3 ut, bortsett fra 3 selv. Så siles alle multipler av 5 ut, bortsett fra 5 selv, og slik fortsetter man, helt til man kommer opp til $\sqrt{401}$. Årsaken til at man ikke trenger å sjekke lengre enn til $\sqrt{401}$ er fordi hvis vi har et sammensatt tall $a \times b$, som er mindre enn eller lik 401, må enten a eller b være mindre enn eller lik med $\sqrt{401}$. Hvis begge var større enn $\sqrt{401}$, ville $a \times b$ vært større enn 401.
- Prøve å dele 401 på alle hele tall opp til 401, for å se om svaret blir et helt tall.

De to siste metodene er tidkrevende og tungvint, og vil derfor ikke gi like stor uttelling som de to første metodene.

Oppgave 4

I en bok finner vi oppgaven $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$.

a) Lag en regnefortelling der du viser hvordan du kan løse oppgaven.

Regnefortellingen kan baseres både på mållingsdivisjon og delingsdivisjon. I regnefortellingen må det være en tydelig formulering av det matematiske spørsmålet, og den må også vise hvordan man går frem for å løse oppgaven.

Eksempel på regnefortelling:
Lisa har $1\frac{3}{4}$ pizza som skal serveres i porsjonspakninger som rommer $\frac{1}{2}$ pizza. For å finne ut hvor mange porsjoner hun får begynner hun å dele pizzaene og legge dem i pakningene. Av den hele pizzaen får hun 2 porsjoner. Av $\frac{3}{4}$ pizza får hun én porsjonspakning til. Det som da står igjen er $\frac{1}{4}$ pizza, som gir en halv porsjon. Av all pizzaen Lisa hadde får hun derfor 3 og en halv porsjon. (Denne regnefortellingen legger vekt på brøk som del av en helhet, og tar utgangspunkt i målingsdivisjon).

Randi har $1\frac{3}{4}$m stoff som hun ønsker å lage puter av. Til hver pute trenger hun $\frac{1}{2}$m stoff. Hun ønsker å finne ut hvor mange puter hun kan lage av det stoffet hun har. Hun ruller derfor ut alt stoffet, og starter med å måle opp $\frac{1}{2}$m. Av 1m stoff kan hun lage 2 puter. Av $\frac{3}{4}$m stoff kan hun sy enda en pute. Hun vil da ha $\frac{1}{4}$m stoff igjen, noe som bare er nok til en halv pute. Randi kan derfor sy $3\frac{1}{2}$puter. (Denne regnefortellingen legger vekt på brøk som måleenhet, og tar utgangspunkt i målingsdivisjon).

b) Hvilket aspekt ved brøk legger du vekt på i regnefortellingen? Begrunn svaret ditt.

I besvarelsen må man kunne begrunne hvilket av de fem mulige aspektene ved brøk regnefortellingen legger vekt på.

c) I divisjonskontekster er det to typer situasjoner som kan forekomme, målingsdivisjonskontekster og delingsdivisjonskontekster. Forklar og begrunn hvilken type divisjonskontekst regnefortellingen din i a) tar utgangspunkt i.

I besvarelsen må det komme tydelig frem hva de legger i målingsdivisjon/delingsdivisjon ved at besvarelsen gir definisjonen av den aktuelle typen divisjon og så forklarer hvordan situasjonen i a) oppfyller denne definisjonen.

Oppgave 5

a) Lag to regnestykker som involverer multiplikasjon og som har samme svar som $26 \cdot 9$ (Regnestykket trenger ikke bestå av bare to tal som multipliseres sammen). Argumenter for at svaret på hver av regnestykkene er det samme som svaret på $26 \cdot 9$, uten å faktisk regne det ut. Argumentet ditt skal være forståelig for elever på mellomtrinnet.

Her kan man benytte flere mulige strategier. Man kan blant annet benytte seg av halvering og dobling/assosiativ egenskap, distributiv egenskap, kommutativ egenskap og referansetall.

Assosiativ egenskap: $26\times9 = (13\times2)\times9= 13\times(2\times9)=13\times18$

At de to regnestykkene gir samme svar kan argumenteres for ved å benytte både arealmodellen og like-store-grupper-modellen. For eksempel kan man tenke seg lengden på arealet (26×9) halveres, og delen som «kuttes av» flyttes slik at bredden dobles. Vi kan også tenke oss at vi har 26 poser med 9 kuler i hver pose. To og to poser slås sammen, og dermed får vi halvparten så mange poser som før, men dobbelt så mange i hver pose. Da har vi 13 poser med 18 kuler i hver pose.

Distributiv egenskap: $26\times9 = 9\times(20+6)$

At de to regnestykkene gir samme svar kan argumenteres for ved å benytte både arealmodellen og like-grupper-modellen.

Kommutativ egenskap: $26\times9 = 9\times26$

At de to regnestykkene gir samme svar kan argumenteres for ved å benytte både arealmodellen og like-store-grupper-modellen.

b) Vi er på femte trinn og elevene jobber med divisjonsoppgaver. Læreren går bort til Bilal for å høre hvordan det går, og følgende dialog utspiller seg:

Bilal: *Se her, jeg fant ut noe lurt. Når du skal dele* 180 *på* 5*, så kan du i stedet først dele på* 10 *og så gange svaret du får med* 2*. Altså, først tar jeg* $180:10=18$*, og så tar jeg* $18\cdot2=36$*, og da vet jeg at 180*$:5$ *er 36.*

Lærer: *Det var interessant. Da fikk du jo to lette regnestykker å regne ut. Men hvordan vet du at det stemmer?*

Bilal: *Eh, nei, jeg vet ikke helt, fordi at 10 er dobbelt av 5 kanskje?*

Lag en regnefortelling som passer til regnestykket $180:5$ og bruk regnefortellingen som et utgangspunkt for et representasjonsbevis som viser at strategien til Bilal alltid vil fungere ved divisjon med 5. Representasjonsbeviset ditt skal være forståelig for elever på mellomtrinnet.

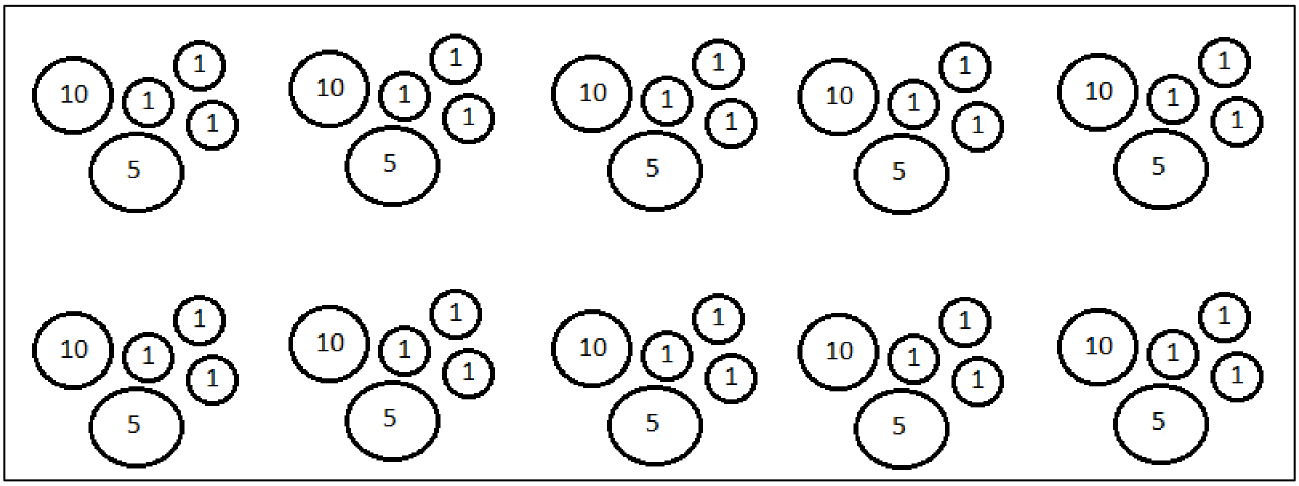
For å kunne svare på det læreren spør om kan vi tenke på den følgende regnefortellingen;

Bilal får 180 kroner av bestefar som han skal dele likt mellom seg og 4 søskenbarn. Bilal velger å dele de 180 kronene i 10 like store hauger, for da vet han at det skal være 18 kroner i hver haug (se *figur 1)*. Han legger så to og to hauger inntil hverandre, slik at han til sammen har 5 store hauger (se *figur 2*). Bilal tenker seg litt om, og finner ut at 18 i hver haug er nesten 20, det mangler bare to. Så i to hauger er det nesten 40, men det vil mangle fire. Slik finner han ut at det er 36 i hver haug.

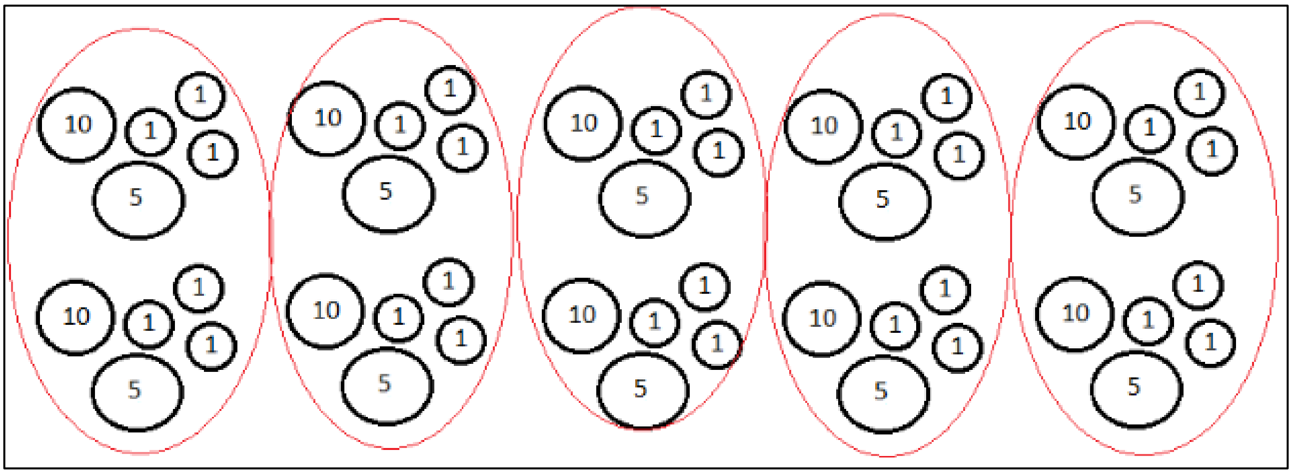
Bilal startet med 180 kroner, og har ikke lagt til noen, eller tatt bort noen. Derfor må det i de fem haugene Bilal har organisert fremdeles være akkurat 180 kroner. Og Bilal har først delt kronene i 10 like store hauger, før han så har lagt to og to slike hauger i lag. Så det er klart at det må være akkurat like mange kroner i hver haug, og at det er akkurat 5 slike hauger Bilal sitter igjen med. Denne strategien med å dele i 10 like store hauger og så i 5 like store hauger er ikke avhengig av at det er akkurat 180 kroner Bilal deler ut. Den vil fungere for alle hele tall som er delelig med 10, men kan også benyttes til tall som ikke går opp i 10, om man deler opp det som skal fordeles i mindre biter.

Dette er et eksempel på et representasjonsbevis for strategien å dele på ti og gange med 2 er det samme som å dele på fem.

Det er tatt i bruk en representasjon, kroner som blir delt inn i like store grupper.
Det er klart at operasjonen som vi må vurdere er hva som skjer når vi først deler ut i ti like store grupper og så slår sammen to og to grupper.
Og det generelle i representasjonsbeviset blir tatt opp; dvs., denne måten å dele ut på er ikke avhengig av at det er akkurat 180 kroner som blir delt ut, men kan benyttes for alle hele tall som er delelig med 10, og evt. alle hele tall.



Figur 1. De 180 kronene er delt i 10 hauger med 18 kroner i hver haug.



Figur 2. Bilal legger to og to hauger sammen, slik at han nå har 5 hauger.

Oppgave 6

Ta utgangspunkt i regnestykket $(-5) + (-9) = -14$.
Finn en kontekst og bruk den til å argumentere for at summen av to negative tall også blir et negativt tall. Inkluder en tydelig matematisk representasjon i konteksten.

Argumentet må være satt i en kontekst, og det er flere ulike kontekster man kan ta i bruk for å vise at summen av to negative tall også blir et negativt tall. For eksempel gjeld, dykking (meter under havet), temperatur, bevegelse i negativ retning osv. Se kapittel 7 i Schou et al. for eksempel.