

Institutt for grunnskolelærerutdanning 5.-10. og bachelor i tegnspråk og tolking

Eksamensoppgave i LGU51014 MATEMATIKK 1 (5-10), EMNE 1

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Andersen Lundeby

Tlf.: 95776288 / 73412628

Eksamensdato: 30.11.2016

Eksamenstid (fra-til): 09:00-15:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:

Tillatte hjelpemidler er vanlige skrivesaker og valgfri utgave av LK06. I tillegg kan kandidaten medbringe ett A4-ark med egne notater på begge sider.

Annen informasjon:

Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Den endelige karakteren vil bygge på en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (uten forside): 4

Antall sider vedlegg: 0

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig **2-sidig**

sort/hvit **farger**

skal ha flervalgskjema

Kontrollert av:

Oppgave 1

En markedsundersøkelse i en liten butikk viste at to tredeler av kundene kjøpte melk. Av de som kjøpte melk var det tre femdeler som kjøpte brød.

- a) Hvor stor andel av kundene kjøpte både melk og brød? Begrunn valget av regneoperasjonen du benytter. Vis dette med en modell/representasjon som du kan presentere på 8.-10. trinn.

Her er det snakk om å finne en andel av en andel, $3/5$ av $2/3$ av en helhet som her er alle kundene. Det skal multipliseres. Å multiplisere en mengde T med en brøk a/b innebærer at mengden T blir delt i b like store deler, og vi teller opp a slike b-deler ved gjentatt addisjon eller multiplikasjon. Da har vi a antall b-deler av mengden T, her er det $3/5$ av $2/3$.

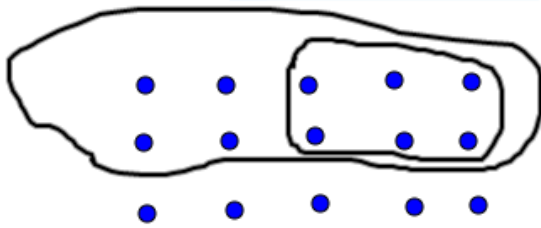
$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

En mulig representasjon på 8.-10. trinn er arealmodellen:

X	X	X		
X	X	X		

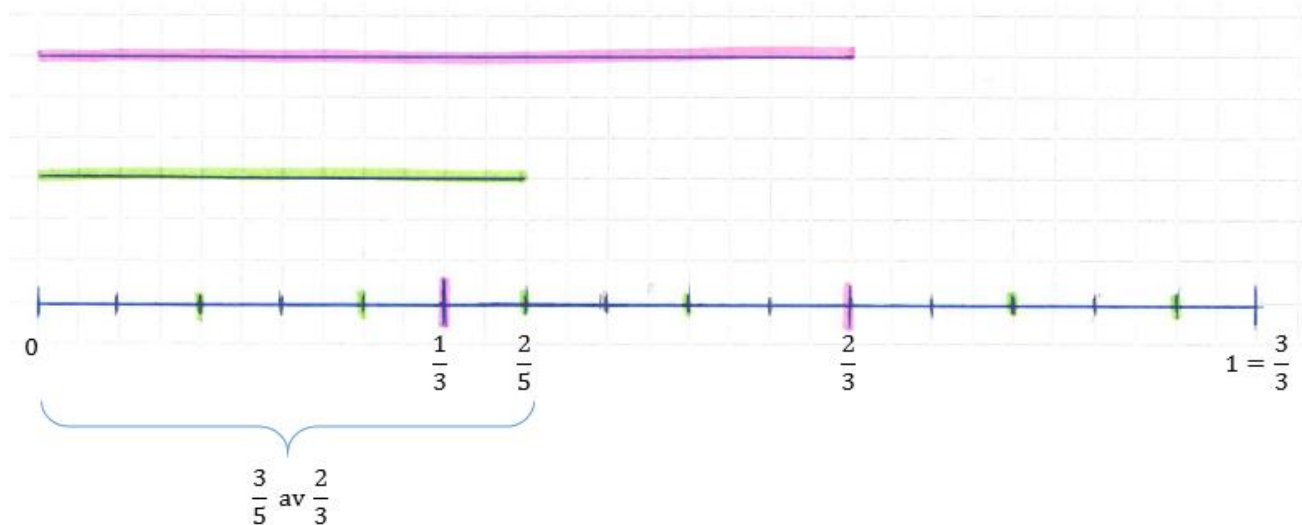
Her ser vi at $2/3$ av det hele er farget blått, og $3/5$ av $2/3$ er markert kryss. Andelen $3/5$ av $2/3$ er seks ruter av helheten på femten ruter (som tilsvarer alle kundene). Dette utgjør $6/15=2/5$. Det er altså $2/5$ eller 40% av kundene som kjøper både melk og brød.

Alternativt kan det benyttes en mengdemodell:



Her er først $\frac{2}{3}$ av helheten ringet rundt, og av dette igjen $\frac{3}{5}$.

Det er også relevant å benytte en lengdemodell, tallinje.



Et linjestykke deles i tre like deler (rosa), og $\frac{2}{3}$ av dette markeres med en rosa linje. Den grønne linjen utgjør $\frac{3}{5}$ av den rosa. Vi kan også se at den tilsvarer $\frac{2}{5}$ av det hele, dersom linjestykket deles i femdeler.

- b) Anta at det var 100 kunder i butikken den dagen denne markedsundersøkelsen ble gjennomført. Bruk en representasjon/modell som viser at det var 40 kunder som kjøpte både melk og brød. Forklaringen skal være rettet mot elever på 5.-7. trinn.

Det er gitt i innledningen av eksamenssettet at alle svarene skal begrunnes. Derfor kan ikke kun svaret fra a) ($\frac{2}{5}$) benyttes direkte. Her settes helheten til 100, og modellene over er fortsatt aktuelle å benytte. Man kan tenke seg et 10×10 rutenett, arealmodell, på følgende måte:

x	x	x	x						
x	x	x	x						
x	x	x	x						
x	x	x	x						
x	x	x	x						
x	x	x	x						
x	x	x	x						
x	x	x	x						
x	x	x	x						
x	x	x	x						

Hver rute representerer en kunde. Her er $\frac{3}{5}$ farget blått og $\frac{2}{3}$ av dette er igjen markert med et kryss.

Med en mengdemodell, arealmodell eller lengdemodell kan 100 personer deles i fem like grupper $20+20+20+20+20$, som kan illustreres på ulike måter. Tre femdeler av dette er $20+20+20 = 60$, og to tredeler av dette $20+20=40$. Det vil ikke være gunstig å begynne med $\frac{2}{3}$ av 100 på grunn av rest, noe man slipper ved å begynne med $\frac{3}{5}$. En god besvarelse bør påpeke at $\frac{3}{5}$ kan multipliseres med $\frac{2}{3}$ og omvendt på grunn av kommutativitet ved multiplikasjon, $a \cdot b = b \cdot a$.

Oppgave 2

Vi har regnestykket $75:15$

- a) Regn ut stykket på to ulike måter som er tilpasset 5. trinn. Strategiene som du velger skal understøttes av en modell/representasjon.

Mulige strategier kan være

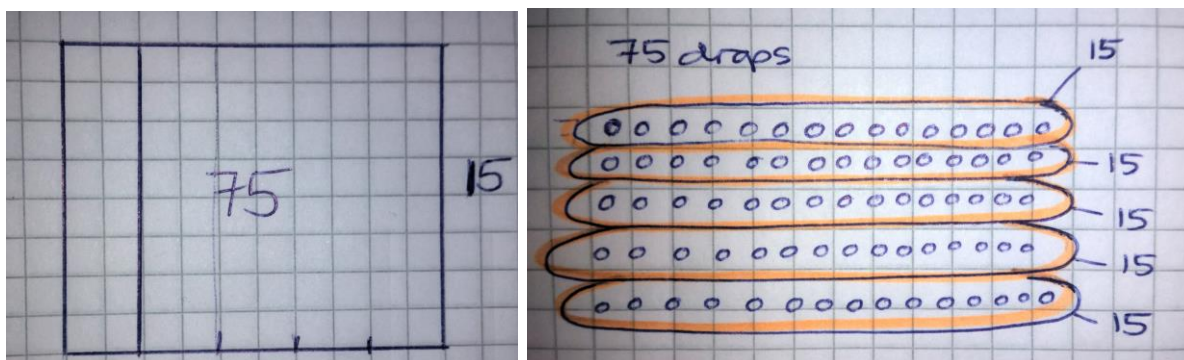
- Den distributive lov
- Gjentatt subtraksjon (deler ut samlet til en gruppe av gangen)
- Deler ut en og en (delingsdivisjon)
- Vennlige tall
- Kombinasjoner

Eksempel på å benytte den distributive lov og like grupper. Vi ser hvor mange ganger vi kan dele ut grupper på 15 av 75.

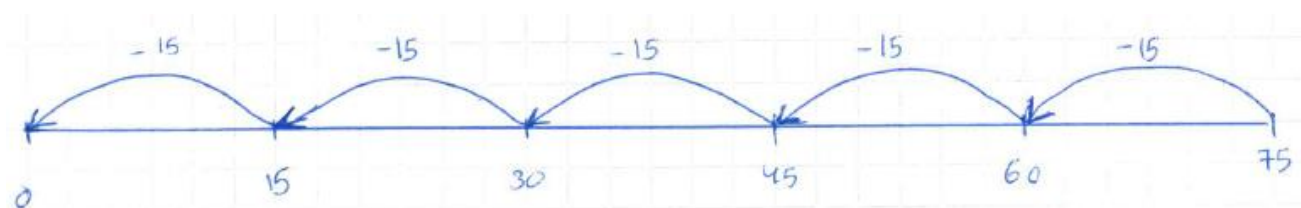
$$75 = 15 + 15 + 15 + 15 + 15$$

$$75 : 15 = (15 + 15 + 15 + 15 + 15) : 15 = 5$$

Dersom vi bruker gjentatt subtraksjon/stegtelling, ser vi at vi kan dele ut 15 fem ganger. Dette kan vi bruke en arealmodell, mengdemodell eller lengdemodell for å vise.



I arealmodellen kan vi tenke hvor mange rektangler med høyde 15 kan vi lage ut av et areal på til sammen 75. I mengdemodellen kan vi tenke at vi har drops som skal fordeles i poser som hver har plass til 15 drops. Hvor mange poser får vi totalt av 75 drops?

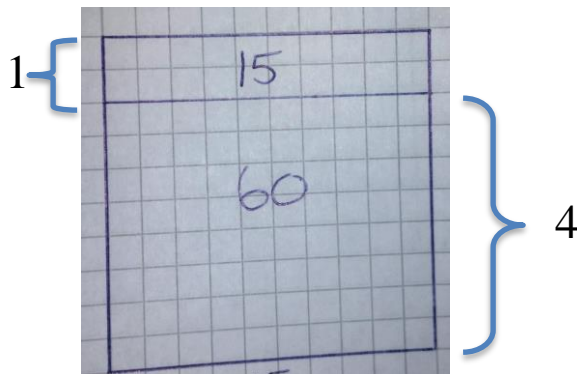


$$75 : 15 = (60 + 15) : 15 = 4 + 1$$

Bruker den distributive lov sammen med vennlige tall, da vet at

$$15 \cdot 4 = 60 \text{ og } 15 : 15 = 1$$

Dette kan også synliggjøres ved arealmodellen:



- b) Gi en situasjon/regnefortelling som passer til oppgaven. Den skal bygge på målingsdivisjon.

Regnefortelling kan være:

- Den forsmådde lillesøstera til prinsessen på erten er lei av nykkene til storesøstera. Hun har funnet ut at 15 erter er det perfekte antall å legge mellom hver madrass. Lillesøstera har henta 75 erter fra kjøkkenet. Hvor mange madrasser trenger hun for å iverksette hevnen?
- Vi har 75 drops som skal fordeles i poser med 15 drops i hver pose. Hvor mange poser får vi?
- 75 elever skal fraktes med minibuss til byen. Hver buss tar 15 elever i tillegg til bussjåføren. Hvor mange turer må bussjåføren ta?

- c) Gi et eksempel på en *minilesson* tilpasset 5.-7. trinn som du mener understøtter utviklingen av en relasjonell forståelse med tanke på divisjon. Hvilke modeller og strategier vil du legge vekt på?

Dette er en vid oppgave som krever at kandidaten tydelig avgrenser omfanget og fokuserer på konkret(e) modell(er) og strategi(er). Det er forventet at besvarelsen viser at det er forstått hva som kjennetegner en minilesson (tidsbruk og form) og uttrykker spesifikt hvilke strategier som har fokus. Spesielt viktig er hvilken streng av oppgaver kandidaten vil benytte, og hva denne strengen vil lede mot, altså hvorfor den vil fungere siden dette er essensen i en minilesson. Minilesson er en kort form for aktivitet på 10-15 min. Den er mer lærerstyrt i kraft av at vi ønsker fokus på bestemte strategier/modeller. Et sentralt

poeng er at det er strengen av oppgaver som skal lede elevene mot en strategi, det skal ikke gjennomgås av læreren i forkant.

Mulige strategier vi kan jobbe med på dette alderstrinnet:

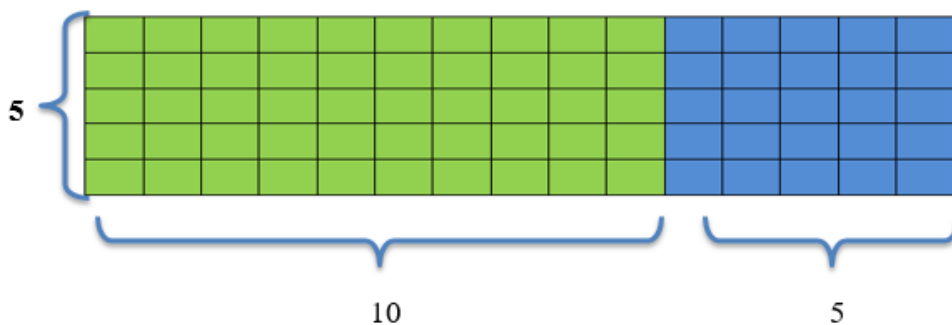
- Den distributive lov
- Proporsjonalitet (halvering eller dobling på både divisor og dividend)
- Gjentatt subtraksjon (deler ut samla til en gruppe av gangen) og målingsdivisjon
- Deler ut en og en (delingsdivisjon)
- Vennlige tall
- Kombinasjoner

Et eksempel på distributivitet kan illustreres gjennom arealmodellen:

$$\begin{array}{ccc} 10:2 & & 50:5 \\ 6:2 & \text{fulgt av} & 25:5 \\ 16:2 & & 75:5 \end{array}$$

Målet er å se at $75:5=(50:5)+(25:5)$, og generelt at en mengde kan divideres ved å dividere to deler av mengden og deretter addere disse svarene. En mengdemodell passer også bra her. Mengden deles i vennlige tall. En relasjonell forståelse av divisjon innebærer å se at en mengde kan splittes i vennlige tall før divisjonen utføres for hver delmengde. Dette kan understøtte en forståelse av for eksempel standardalgoritmen for divisjon, der vi først forsøker å dele hele hundrere, tiere og så videre. En god besvarelse skal ikke vise en oppskrift på divisjon, men indikere hvorfor den fungerer.

Arealmodellen nedenfor kan illustrere hvor mange rektangler med høyde 5 vi kan lage av et areal på 75 som vi deler inn i arealene 50 og 25.



Oppgave 3

En oppgave til elever på 6.trinn lyder slik:

«Fem barn skal dele åtte like store sjokolader. Hvor mye sjokolade får hvert barn? Hvordan vil du fordele sjokoladene?».

Marit påstår at hvert barn får en hel pluss en halv pluss en tidels sjokolade, det vil si

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ sjokolade. Tore er uenig og mener at hvert barn får $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$ sjokolade.

- a) Hvem har rett? Hvordan tror du Marit og Tore har tenkt, og hvordan kan de ha representert eller tegnet dette?

Marit kan ha delt opp de åtte sjokoladene slik:

1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
					$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$

Hun deler først ut fem hele sjokolader, så fem halve. Den siste halvdelen må da deles i fem, som gir en tidels sjokolade. Tore kan ha delt det på følgende måte:

1	1	1	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$5 \cdot \frac{1}{5}$
					$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
					$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{15}$	

På samme måte som Marit deler Tore først en hel sjokolade til hvert av barna, fulgt av en tredel til hver. Den siste tredelen av den nest siste sjokoladen må deles på fem barn slik at hver del av denne biten blir $\frac{1}{15}$. Den siste sjokoladen deles til slutt på fem barn. Både Marit og Tore har altså riktig svar.

- b) I neste oppgave er det åtte barn som skal dele fem sjokolader. Løs oppgaven på samme måte som Marit eller Tore som begge brukte enhetsbrøker/stambrøker. Hvor stor del av en sjokolade får hvert barn nå?

Siden ingen av barna får en hel sjokolade kan det være naturlig å dele ut halvdeler

først. Den femte og siste sjokoladen blir delt i åtte. Dette gir $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
				$\frac{1}{8}$
				$\frac{1}{8}$
				$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
				$\frac{1}{8}$
				$\frac{1}{8}$
				$\frac{1}{8}$

En annen mulighet er $\frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}$

Oppgave 4

En elev har kommet fram til følgende: $3\frac{3}{8} : \frac{1}{4} = 13\frac{1}{8}$

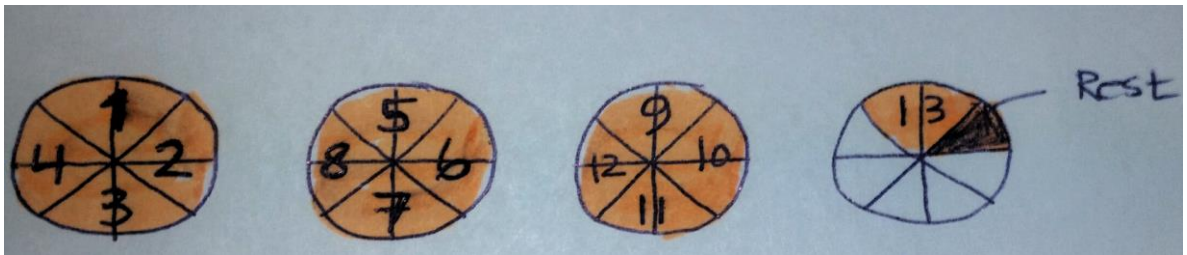
- a) Er dette riktig? Hvordan kan eleven ha tenkt?

Nei, korrekt svar er $13\frac{1}{2}$.

Eleven kan ha tegnet $3\frac{3}{8}$ som f.eks. fire sirkler, der hver sirkel er delt i åttedeler. Da

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, har eleven kanskje telt seg fram til 13 hele sett bestående av $\frac{2}{8}$. (Figuren

under illustrerer dette. Tallene 1-13 angir et helt sett på $\frac{1}{4}$ eller $\frac{2}{8}$. Den svarte sirkelsektoren angir rest)



Det er mulig at eleven har kommet fram til $\frac{1}{8}$ fordi divisjonsstykket gir 13 hele sett og en rest på 1. Eleven har trolig ikke skjønnt at et sett er $\frac{1}{4}$, men ser av figuren at rest utgjør $\frac{1}{8}$ av en sirkel som er delt i åttedeler. På denne måten kan eleven feilaktig ha konkludert med at svaret $13\frac{1}{8}$

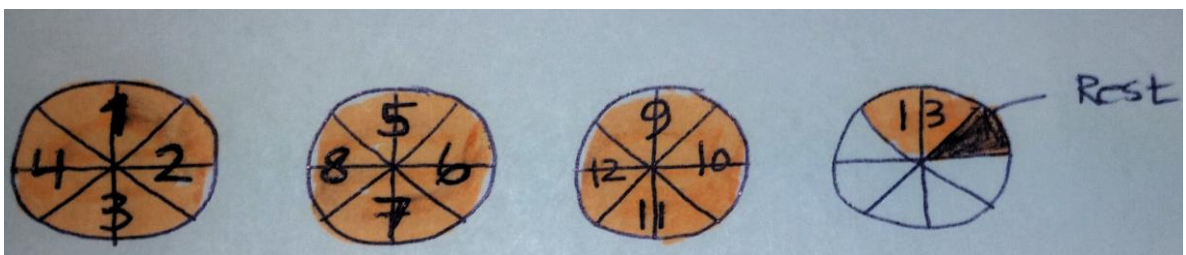
- b) Hvordan kan du illustrere det du mener er det riktige svaret med en figur, der du har spesiell fokus på rest? Forklar figuren din.

$$3\frac{3}{8} : \frac{1}{4} = \frac{27}{8} : \frac{2}{8}$$

Oppgaven kan tolkes som: Hvor mange sett med $\frac{1}{4}$ kan du lage av $3\frac{3}{8}$?

Eller med bruk av fellesnevner: Hvor mange sett med $\frac{2}{8}$ er det i $\frac{27}{8}$?

Figuren under viser fire sirkler som er delt i åttedeler. Tallene 1-13 angir et helt sett på $\frac{1}{4}$ eller $\frac{2}{8}$. Den svarte sirkelsektoren angir rest)



Siden ett sett er $\frac{2}{8}$ kan vi telle oss fram til 13 hele sett i $\frac{27}{8}$. I tillegg er det en rest på $\frac{1}{8}$ av en sirkel som utgjør halvparten av et sett på $\frac{2}{8}$, som gir svaret på

$$3\frac{3}{8} : \frac{1}{4} = 13\frac{1}{2}$$

Oppgave 5

- a) Vårt tallsystem er et posisjonssystem med base 10. Hva betyr det?

Det at vi har et posisjonssystem med grunntall 10 betyr at vi bruker ti siffer:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

og at plasseringen til et siffer bestemmer hvilken potens av 10 den skal multipliseres med. Eksempel:

$$5732 = 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

- b) Hvilke utfordringer møter man på hvis man har grunntall (base) > 10 ?

Med base > 10 får vi problemer med siffer siden vi bare har 10 forskjellige. Da må vi introdusere nye symboler som representerer tall større enn 10, og de kan være hva som helst bare man har kontroll på hva de betyr. For eksempel i 12-tallsystemet er det veldig vanlig å bruke

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B$$

- c) Gjør om 1111_{to} og 1001_{to} fra totallsystemet til firetallsystemet.

$$1111_{to} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15_{ti}$$

$$15_{ti} = 12 + 3 = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 33_{fire}$$

$$1001_{to} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 1 = 9_{ti}$$

$$9_{ti} = 8 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 21_{fire}$$

- d) Vis hvordan du adderer de to tallene du får i c) i firetallsystemet. Kontroller at svaret er riktig ved å gjøre om til titallsystemet.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 33_{\text{fire}} \\
 + 21_{\text{fire}} \\
 \hline
 120_{\text{fire}} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Her kommer 0-en fra at $10_{\text{fire}} = 4_{\text{ti}}$, så når vi har $3 + 1$ får vi 0 og en i mente.

Samme skjer med $1 + 3 + 2$, så vi får $33_{\text{fire}} + 21_{\text{fire}} = 120_{\text{fire}}$.

Gjort om til 10-tallsystemet blir dette $15 + 9 = 24$

- e) Hva er gjort feil i følgende utregning og hvordan ville du som matematikklærer hjulpet medstudenten videre?

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 31_{\text{syv}} \\
 - 16_{\text{syv}} \\
 \hline
 = 15_{\text{syv}} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Feilen er at når det blir lånt/vekslet 10 fra 30, glemmer studenten at dette er 10 i 7-tallsystemet, altså $1 \cdot 7 + 0 \cdot 1 = 7_{ti}$. Så når det står $(10 + 1) - 6$ må man tenke på dette som $11 - 6$ i 7-tallsystemet eller $8 - 6$ i titallsystemet, altså 2. Så $31_{syv} - 16_{syv} = 12_{syv}$.

Det er flere måter å gå fram på for å hjelpe studenten videre. For eksempel en kan gå gjennom subtraksjonsalgoritmen og diskutere hvordan og hvorfor hvert steg fungerer, sammenlign med algoritmen i titallsystemet osv.

Oppgave 6

- a) La a og b være heltall. Hva betyr det at a er delelig med b ?
Vi har at a og b er heltall. Da er a delelig med b dersom det finnes et heltall k slik at

$$a = b \cdot k$$

- b) Vis ut i fra definisjonen at 133 er delelig med 7, at 136 er delelig med 8 og at 99 er delelig med 9.

For å vise at de gitte tallene er delelige med de andre må vi finne k som i definisjonen over:

$$133 = 7 \cdot 19$$

$$136 = 8 \cdot 17$$

$$99 = 9 \cdot 11$$

- c) For hvilke tall a , b og c er den følgende påstanden riktig? Begrunn svaret.

"Hvis $a \cdot b$ er delelig med c er enten a eller b delelig med c ."

Påstanden er ikke riktig når c er ikke primtall. For eksempel, for $a = 2, b = 6, c = 4$, har vi at $a \cdot b$ er delelig med c , men hverken a eller b er delelig med c .

Påstanden er riktig når c er primtall. Hvis $a \cdot b$ er delelig med c , så finnes det k slik at $a \cdot b = c \cdot k$. Da følger det fra aritmetikkens fundamentalsetning at enten a eller b delelig med c .

En kan også bevise det ved bruk av Euklids algoritme. Anta at c deler $a \cdot b$, men ikke

deler a . Da har vi at $\text{sf}(c, a) = 1$. Har da fra Euklids algoritme at vi kan skrive

$$cx + ay = 1$$

Multipliserer begge sider av ligningen med b og får

$$bcx + bay = b$$

Skriver om så vi får

$$c \cdot (b \cdot x) + (a \cdot b) \cdot y = b$$

der vi har at c deler c og at c deler $a \cdot b$. Det betyr at c deler begge leddene i summen, altså deler c hele summen. Det betyr at c deler b .

Oppgave 7

Finn en kontekst/representasjon som forklarer følgende regnestykker.

Flere kontekster/representasjoner kan være relevant for hver oppgave, her er bare eksempel. Viktig å få med hva det betyr at et tall er negativt, og hva regneoperasjonen betyr.

a) $5 - (-3) = 8$

$5 - (-3) = 8$. Her kan man bruke temperatur, der negative tall betyr minusgrader og subtraksjon betyr å finne forskjell i temperatur. Si for eksempel at temperaturen var 5 grader på mandag og -3 grader på søndag. Hva var forskjellen?

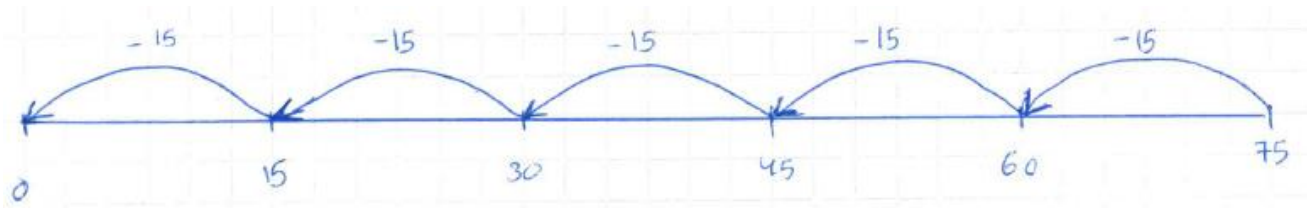
b) $20 + (-14) = 6$

$20 + (-14) = 6$. Her kan man bruke gjeld der negative tall betyr penger du skylder og addisjon betyr at du legger til gjelda di på pengene du har fra før. Si for eksempel at du har 20 kroner i lommeboka, men skylder 14 kroner til en kompis. Hvor mye kan du bruke og fremdeles ha igjen nok til å betale gjelda?

c) $5 \cdot (-4) = -20$

$5 \cdot (-4) = -20$. Meter over havet, der negative tall betyr at du er under havoverflaten. For eksempel, du er på fire meters dyp, men må fem ganger så langt ned for å

komme til bunnen. Hvor langt ned er det?



d) $(-15) : (-3) = 5$

$(-15) : (-3) = 5$. Kulerepresentasjon der negative tall blir representert med minus-kuler og positive tall med pluss kuler. Ta femten minus-kuler. Hvor mange ganger kan du ta vekk 3 minus-kuler?