Sensurveiledning

Emnekode: LGU51014/LGU51005	**Emnenavn:** Matematikk 1 (5-10), emne 1	
Semester: Høst	**År:** 2015	**Eksamenstype:** Individuell skriftlig

Oppgaveteksten:

Oppgave 1

I en klasse med åtte gutter og tolv jenter skal det holdes en julefest. Det deles ut seks spann is til guttene og åtte spann is til jentene. Hvert spann rommer ni desiliter.

Følgende dialog finner sted:

Gunnar: *Det er urettferdig! Jentene får mer is enn oss!*

Mia: *Ja, det er klart! Vi er jo flere enn dere.*

a. Bruk brøk for å argumentere for/imot Gunnar og Mias påstand.

I denne oppgaven må det vises til at Gunnar trolig ikke tenker proposjonalt. Han ser på antall spann med is. Det må vises til forholdet $\frac{6}{8}$ og $\frac{8}{12}$ og argumenteres for at $\frac{6}{8} > \frac{8}{12}$. I argumentasjonen kan enten brøkene forkortes eller det kan regnes om til antall desiliter is. Målt i antall spann får guttene $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ mens jentene får $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Da kan det argumenteres for at $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Den første brøken "mangler" $\frac{1}{4}$ på en hel, mens den andre "mangler" $\frac{1}{3}$. Argumentasjonen kan da ta utgangspunkt i at $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

Ved å se på antall desiliter får guttene $\frac{6 \cdot 9}{8} = 6\frac{3}{4}$ mens jentene får $\frac{2 \cdot 9}{3} = 6$

Figuren nedenfor viser hvordan en læringsressurs (www.ndla.no) presenterer divisjon med brøk.

$$10:\frac{1}{2}=\frac{10}{1}\underbrace{\overbrace{:\frac{1}{2}=\frac{10}{1}\cdot\frac{2}{1}}^{\text{Brøken snus opp ned}}}_{\text{Deletegn blir til gangetegn}}=\frac{10\cdot 2}{1\cdot 1}=\frac{20}{1}=20$$

Regelen blir

Å **dividere** med en brøk er det samme som å **multiplisere** med **den omvendte brøken**.

b. Gi en kort forklaring til eksemplet over.

Eksemplet gir en instrumentell innføring i en framgangsmåte for divisjon med brøk. "Brøken snus opp ned" og "deletegnet blir til gangetegn" gir instruksjoner til hvordan en slik divisjon kan regnes ut. Hele tall skrives om til brøker for å vise multiplikasjonen.

c. Lag en regnefortelling til $\frac{3}{2}:\frac{1}{4}$ og bruk to ulike strategier for å løse den.

Her er det mange muligheter for å lage en regnefortelling. Et eksempel kan være: Hvor mange kvartlitre brus er det i en og en halvliter? Eller: Hver person får et kvart kakestykke. Hvor mange personer kan få kake når vi har 3/2 kake.

Strategier for å utføre divisjonen kan være

- å følge regelen over
- tegne modeller som viser hvor mange ¼ det er utgjør 3/2
- tallinje
- vise utregning med brudden brøk
- omsette divisjonen til 3: ½ eller 6:1

d. Du er er matematikklærer for en 8. klasse og skal planlegge neste undervisningsøkt. Eleven skal da introduseres for divisjon med brøk. Læringsmålet er at elevene skal få en relasjonell forståelse for divisjon med brøk. Beskriv hvordan du vil gå fram og hvilke aktiviteter du vil benytte.

Noen stikkord er: relasjonell og instrumentell forståelse, representasjoner, konkreter, store idéer (big ideas), målings- og delingsdivisjon, matematikkompetanse.

Stikkordene bør inngå i forklaringen på en måte som viser korrekt bruk og forståelse av begrepene. Målet for undervisningen skal være at elevene har en relasjonell forståelse for divisjonen. Det betyr at det må knyttes forbindelser til andre tema i matematikken. Her vil det være naturlig at det er divisjon og multiplikasjon. Kandidaten bør benytte konkreter og modeller for å illustrere divisjonsstrategien og resultatet av divisjonen.

Besvarelsen bør inneholde

- spesifisert læringsmål for undervisningsøkta

- teori knyttet til brøk og divisjon
- de store ideene
- forutsetninger
- begrunnelse i teori for valg av undervisning

Oppgave 2

I boken *Constructing Multiplication and Division* av Fosnot og Dolk brukes begrepet *læringslandskap (landscape of learning)*.

a. Hva menes med metaforen læringslandskap?

Metaforen læringslandskap forteller oss at læring i matematikk ikke er en lineær prosess, men snarere et nettverk av stier som kan endre opp med en målkunnskap. Underveis møter elevene viktige ideer, men det er ikke noen fastlagt rekkefølge for hva som bør bygge på hva.

b. Lag en tegning/skisse av et læringslandskap for multiplikasjon. Forklar og gi eksempler på eventuelle andre begreper du måtte finne hensiktsmessige i denne sammenhengen.

Besvarelsen bør inneholde strategier, modeller og viktige ideer (*big ideas*) som er relevante for multiplikasjon. Dette kan for eksempel være:

Strategier:

- Telle én og én
- Stegtelling (telle med mer enn én om gangen)
- Adderer grupper
- Dobling
- Halvering og dobling
- Distributivitet
- Distributivitet med tiere
- Kommutativitet
- Bruke vennlige tall

Modeller:

- Gjentatt addisjon / like grupper
- Rutenett
- Areal
- Kombinasjoner
- M.fl. avhengig av hvilket læreverk man ser i.

Big ideas:

- Distributivitet
- Kommutativitet
- Enhetsinndeling (*unitizing*)
- m.fl. avhengig av hvilket læreverk man ser i.

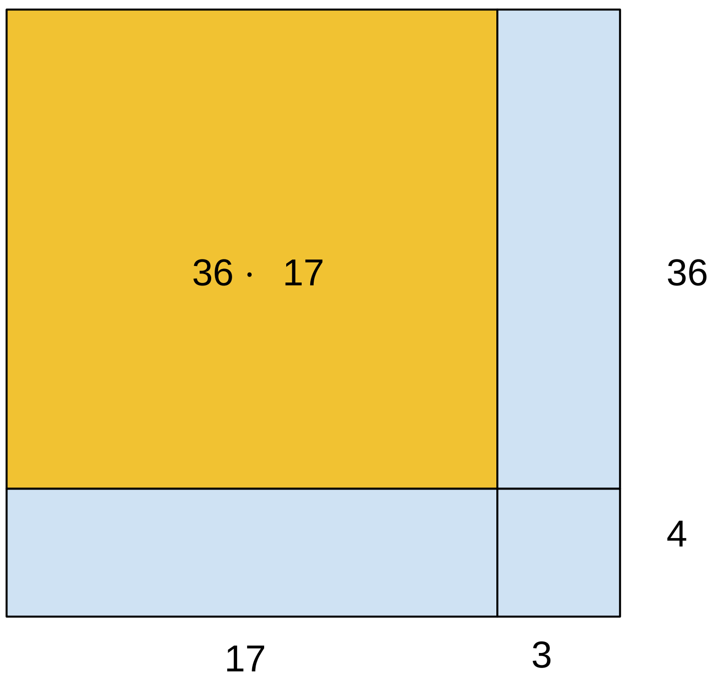
Thomas skulle regne ut 36 · 17. Han startet med 40 · 20 = 800. Så trakk han fra 4 og 3 for å få svaret (800 - 4 - 3 = 793).

c. Hvordan kunne Thomas ha regnet korrekt ved å starte med 40 · 20?

Han kunne ha startet med 40 · 20, som gir 800. Deretter må han trekke fra 3 · 4, 3 · 36 og 4 · 17.

d. Begrunn løsningen din i *c*. på to ulike måter, der du bruker de ulike modellene for multiplikasjon, for eksempel tabell (array). Det skal framgå fra begrunnelsen din hvorfor det du gjør i *c* er korrekt og hvorfor Thomas sin metode er ikke korrekt.

Dette kan en greit se ved å se for seg en figur som dette:



Her starter vi med hele figuren, og ser hvordan man kan trekke fra biter for å få ønsket regnestykke.

Rutenett vil være så godt som det samme.

Et alternativ: Tegn opp 40 sekker med 20 i. Fjern 4 sekker for å få 36 · 20. Da har vi 800 - 4 · 20 = 720.

Så plukkes det ut 3 fra hver av de 36 sekkene. Da står vi igjen med 36 · 17, som er 720 - (36 · 3) = 720 - 108 = 612.

Oda går på 9.trinn og oppdaget en dag følgende: Dersom man skal finne produktet av 7 og 13, kan man addere de å få 20 og subtrahere de og få 6. Dersom man halverer disse får man 10 og 3. Man kvadrerer så disse og får 100 og 9. Dermed blir produktet 13 ganger 7 lik 100 - 9 som blir 91.

e. Bruk Odas metode for å finne produktet av 19 og 21. Hvorfor gir dette riktig svar?

$19 \cdot 21$:

$$19 + 21 = 40$$

$$21 - 19 = 2$$

Som gir 20 og 1. Kvadrert blir det 400 og 1. Produktet blir 400 - 1 = 399.

Generelt:

Gitt to tall a og b:

$$(½\,(a+b))^2 - (½\,(a-b))^2 = (¼)\,(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) = (¼)\,(4ab) = ab$$

Oppgave 3

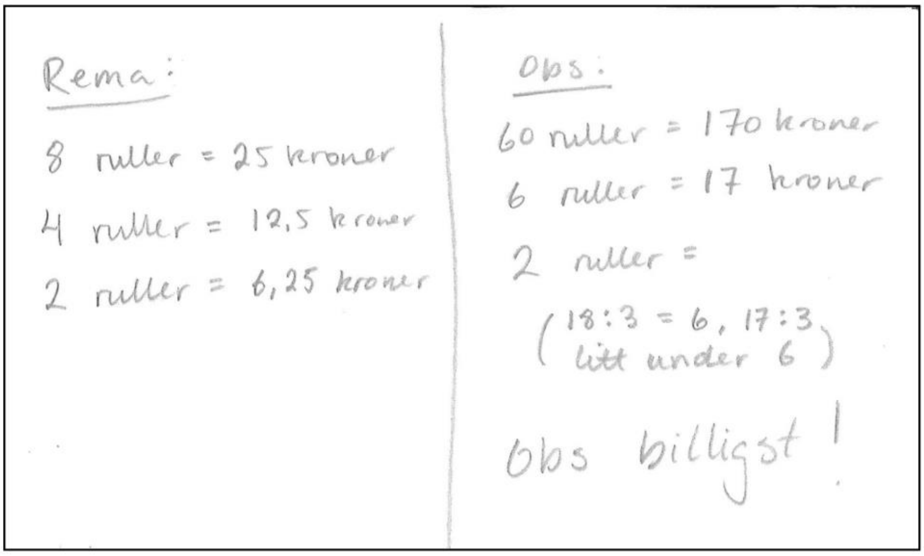
a. I skolen har vi to tankemodeller for divisjon. Gjør rede for og gi eksempler på disse modellene.

Det skal man gjøre redes for målings -og delingsdivisjon. Her kan man godt benytte naturlige tall. Hva målingsdivisjon angår, skal det tydelig fremgå av forklaringen og eksempelet at en bestemt mengde skal deles i grupper, og at det er antall grupper som er sentralt. I delingsdivisjon er det antall elementer i hver gruppe man skal fram til.Eksemplene må være relevante i forhold til måleenheter og/eller kontekst. Man kan tenke seg situasjoner der en kasse med frukt skal fordeles i poser (målingsdivisjon) eller finne hvor mange frukt det blir i en pose (delingsdivisjon). Det trekkes for kontekster der for eksempel et svar som 1,2 mennesker åpenbart ikke gir mening. Det vil være fordelaktig at eksemplene eller redegjørelsen omkring målings -og delingsdivisjon understøttes av figurer.

Følgende oppgave er gitt i en 5.klasse: «På Obs er det tilbud på 60 ruller toalettpapir til 170 kroner. Rema har fast lavpris på samme type toalettpapir til 25 kroner for 8 ruller. Hvor er det billigst å kjøpe toalettpapir?»

b. Under ser du arbeidet fra to grupper av elever som har jobbet med denne oppgaven. Analyser arbeidet til de to elevgruppene.

Tobias og Hedda:



Rema:

8 ruller = 25 kroner

4 ruller = 12,5 kroner

2 ruller = 6,25 kroner

Obs:

60 ruller = 170 kroner

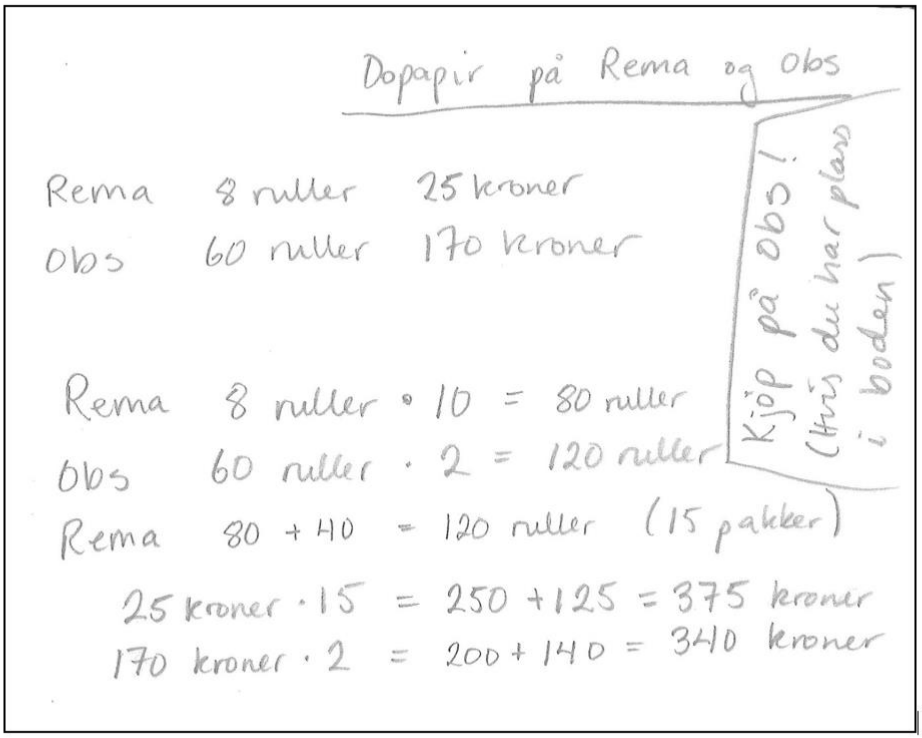
6 ruller = 17 kroner

2 ruller =

(18 : 3 = 6, 17 : 3 litt under 6)

Obs billigst!

Sarah og Raymond:



Dopapir på Rema og Obs

Rema 8 ruller 25 kroner

Obs 60 ruller 170 kroner

Rema 8 ruller · 10 = 80 ruller

Obs 60 ruller · 2 = 120 ruller

Rema 80 + 40 = 120 ruller (15 pakker)

25 kroner · 15 = 250 + 125 = 375 kroner

170 kroner · 2 = 200 + 140 = 340 kroner

Kjøp på Obs! (Hvis du har plass i boden)

I første omgang må det stadfestes at toalettpapir er rimeligst per rull på Obs i dette tilfellet, for eksempel ved å sammenligne pris per rull ved å se på brøkene $\frac{170}{60}$og $\frac{25}{8}$. Man kan argumentere for at begge gruppene kommer fram til korrekt svar. Hedda og Tobias sammenligner brøkene man får ved å sette $\frac{antall\ ruller}{pris\ totalt}$, og forkorter disse korrekt til man har 2 i tellerne gjennom tideling og halvering. Man kan påpeke at det er delingsdivisjon her da det er pris per rull (her to ruller) som sammenlignes. Sarah og Raymond finner fellesnevner, minste felles multiplum til 8 og 60 (120) og kan sammenligne $\frac{375}{120}$og $\frac{340}{120}$. Mens Hedda og Tobias avgjør laveste pris ved å se på pris per rull finner Sarah og Raymond en løsning ved å se på prisen du må betale dersom du skal kjøpe eksakt like mange ruller i begge butikkene. Siden man antar at tilbudene kun gjelder det oppgitte antall ruller kan dette betraktes som en målingsmodell med måleenheter/grupper på henholdsvis 8 og 60 ruller. Strategiene til elevene skal beskrives, og i en dypere besvarelse reflekteres det over dette matematiske innholdet.

Oppgave 4

a. Forklar hvordan plassverdisystemet med grunntall (basis) g fungerer (for enkelhets skyld kan du anta at $g \leq 10$). Hvilken stor idé er involvert?

Et tall beskrives med et antall siffer skrevet etter hverandre. Dersom grunntallet er g, brukes sifrene fra og med 0 til og med $g-1$. Hvert siffer svarer til et ledd i en sum som utgjør tallet som beskrives, og verdien av dette leddet er sifferets verdi ganger med en potens av g som avhenger av posisjonen til sifferet. Vi teller fra høyre og starter med 0: første siffer angir et multiplum av 1 (g^0), andre siffer (dersom det er tilstede) angir et multiplum av g^1, tredje siffer (dersom det er tilstede) angir et multiplum av g^2, osv. For å ta et eksempel, betyr 432 i femtallsystemet (plassverdisystemet med grunntall 5)

$$4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 100 + 15 + 2 = 117$$

i det vanlige titallsystemet.

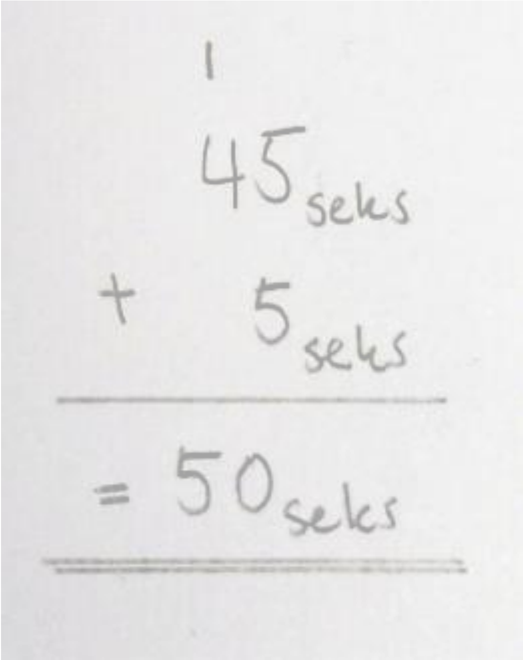
Den store ideen som er involvert kalles *unitization* på engelsk, og innebærer å se på en gruppe av elementer som en enkelt enhet (gruppering?).

b. Hva blir 43_{seks} uttrykt i totallsystemet (det *binære* tallsystemet)?

Vi går via titallsystemet: $43_{seks} = 4 \cdot 6 \quad + 3 = 27$ og

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11011_{to}$$

c. Hva er galt med følgende utregning? Hvordan ville du som matematikklærer korrigere utregningen?



Problemet her er at eleven tenker i titallsystemet, mens utregningen skal gjøres i sekstallsystemet. Eleven legger sammen 5 enere og 5 enere og får 10 enere og setter en null på enerplassen i svaret og legger til en ekstra "tier" på tierplassen. Men "tierplassen" angir istedet antall seksere, så eleven har i virkeligheten lagt sammen 5 og 5 og fått 6 som svar. Det riktige her ville vært å skrive de 10 enerne i sekstallsystemet, som $10 = 6 + 4 = 14_{seks}$og istedet satt et firetall på enerplassen og lagt til en ekstra sekser på sekserplassen, som ville gitt 54_{seks}som svar.

Det er trolig mange måter å gå frem på for å korrigere en slik utregning. For at eleven skal se at utregningen er feil, kan man begynne med å be vedkommende uttrykke hele regnestykket i titallsystemet, der det vil stå $29 + 5 = 30$. Så kan man begynne å se på *hva* som gikk galt, dersom eleven ikke forstår det umiddelbart. Eleven må hjelpes til å forstå at for å kunne regne i sekstallsystemet, så er det grupperinger av 6 som er relevant, og de 10 enerne må uttrykkes i sekstallsystemet før de kan regnes med i denne sammenhengen. Følgende utregning, kanskje med et tilsvarende eksempel i titallsystemet, kan kanskje hjelpe eleven til å forstå hva som foregår:

$$(4 \cdot 6 + 5) + 5 = 4 \cdot 6 + (5 + 5) = 4 \cdot 6 + 6 + 4 = 5 \cdot 6 + 4 = 54_{seks}.$$

Deretter kan man begynne å snakke om at 6 + 4 altså skrives 14 i sekstallsystemet, og at regnestykket blir det samme når man stiller leddene opp under hverandre som over.

Øystein sitter å jobber med delelighet i titallsystemet. Han har sett på alle tresifrede tall og gjort følgende observasjon: hvis tallet dannet av de to bakerste sifrene i et tall er delelig med 4 så er tallet selv delelig med 4.

d. Er observasjonen til Øystein korrekt? Gjelder den for alle tall? Begrunn svaret ditt.

Ja, observasjonen til Øystein er korrekt og den gjelder for alle tall. Et tall på 3 eller flere siffer kan alltid skrives som en sum av et (helt) antall hundrere og et antall enere. Siden 100 er delelig på 4 er også et helt antall hundrere delelig på 4. Tallet dannet av de to bakerste sifrene svarer til antall enere, og hvis det tallet også er delelig med 4, så er hele summen også delelig med 4. Dette gjelder naturligvis også for tall med færre enn 3 siffer - her får vi 0 hundrere, men tallet blir ikke "noe mindre" delelig på 4 av den grunn.

Sagt på en annen måte, kan vi skrive et tall $x$som $x = k \cdot 100 + j$ der $k$er et heltall og $j$er tallet dannet av de to siste sifrene. Dersom $j$er delelig med 4, altså på formen $4 \cdot l$ for et heltall l, så er også x delelig med 4, siden

$$x = k \cdot 100 + j = 4 \cdot k \cdot 25 + 4 \cdot l = 4 \cdot (25 \cdot k + l)$$

Relevant pensumlitteratur:

Artikler:

- Skemp, R. - Instrumental and relational understanding
- Alseth, B., Røssland, M. - Meninger og myter om matematikkfaget

Bøker:

- Fosnot, C. T., Dolk, M. - Construction multiplication and division - Kap. 1-7
- Birkeland, P., Breiteig, T., Venheim, R. - Matematikk for lærere 1 - kap. 1, 3-5 (ikke kap 4.4.)
- Schou, J., Jess, K., Hansen, H. C., Skott, J. - Tal, algebra og functioner - kap. 1-3,5-7 og 9

30.11.2015 — Tore Forbregd

Dato/sted — *Faglærer/oppgavegiver*

Ved eksamen benyttes følgende karakterskala:

Symbol	***Betegnelse***	***Generell, kvalitativ beskrivelse av vurderingskriterier***
A	Fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	Meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	God	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.

D	Nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	Tilstrekkelig	Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	Ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og manglende selvstendighet.