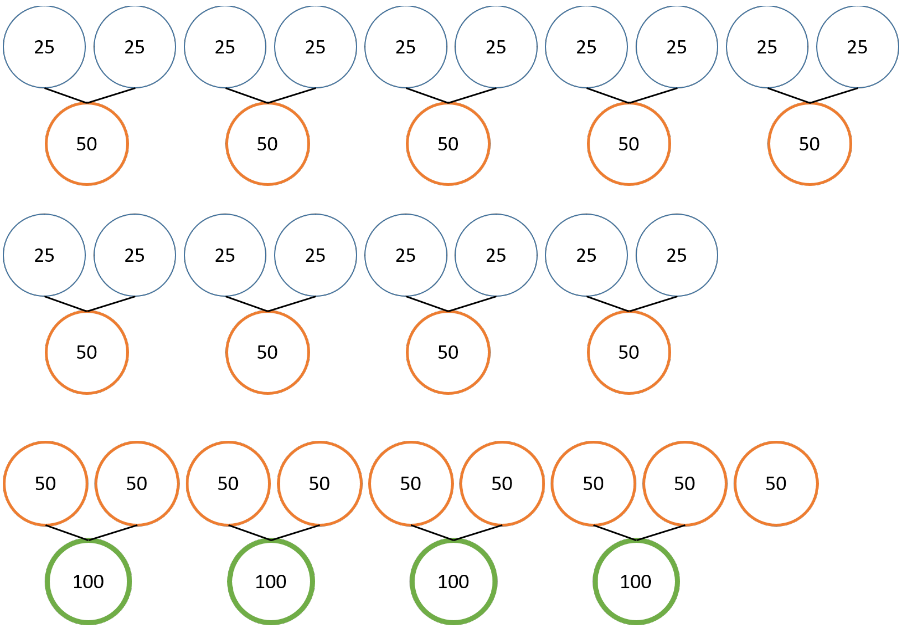
NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for lærerutdanning

Sensurveiledning i MGLU1103/LGU11100 Matematikk 1 (1-7) emne 1A, vår 2018

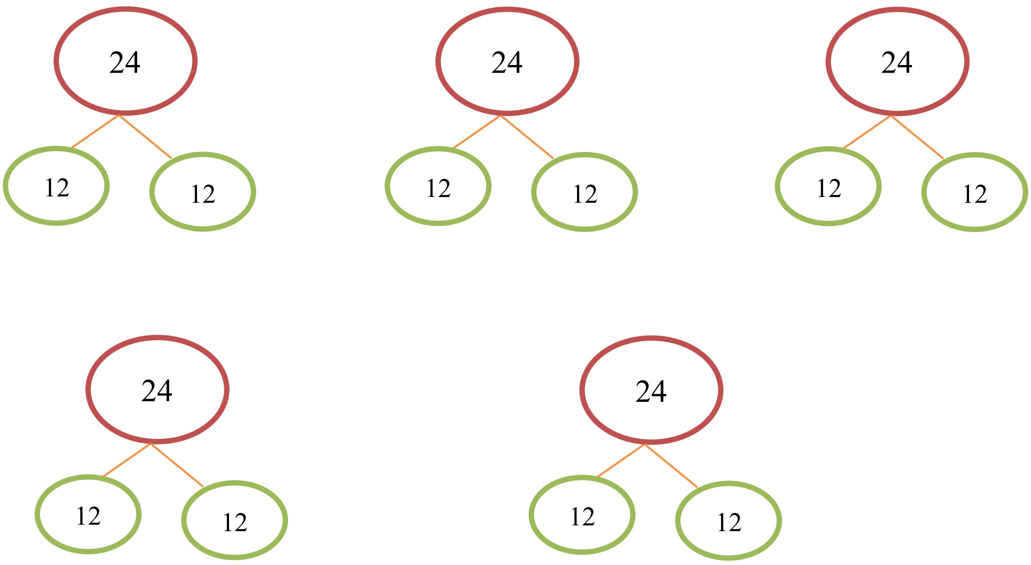
Oppgave 1

a) Løs regnestykket $18 \cdot 25$ på to forskjellige måter, der ingen av måtene er standardalgoritmen for multiplikasjon.
Velg en av de to løsningsstrategiene dine og argumenter for at denne er gyldig ved hjelp av en modell for multiplikasjon.
En god besvarelse på oppgaven viser to varierte løsningsstrategier der en av de er godt begrunnet. Selv om oppgaveteksten ikke stiller eksplisitte krav om hvor ulike de to måtene må være, så viser studenten mindre bredde i sin kompetanse hvis de to valgte strategiene er svært like.
En av måtene kan være å for eksempel bruke en regnefortelling der vi har 18 poser med 25 klinkekuler i hver pose og skal finne ut hvor mange klinkekuler vi har til sammen. Hvis vi slår sammen to og to poser, har vi 9 poser med 50 kuler i hver. Gjør vi det samme med 8 av de 9 posene, får vi fire poser med 100 kuler i hver og har en pose med 50 kuler i. Det vil si at vi har 450 kuler til sammen.



En annen løsningsmetode kan være for eksempel å bruke distributivitet (for eksempel $18 \cdot 25 = 10 \cdot 25 + 8 \cdot 25$). Her kan vi også argumentere ved hjelp av like grupper, der vi har 18 poser med 25 brikker i hver. $18 \cdot 25$ er det totale antallet brikker i posene. Vi kan argumentere for distributiv egenskap ved å først finne ut hvor mange brikker det er i 10 a posene, og så finne ut hvor mange brikker det er i 8 av posene, og så legge sammen.

b) Oda har jobbet med regnestykket $5 \cdot 24$, og i boka hennes står bare svaret 120.
Du spør Oda hvordan hun kom frem til svaret, og hun svarer «Jeg tok bare ti ganger tolv, som er 120.».
Ta utgangspunkt i en modell for multiplikasjon og forklar at Odas strategi er korrekt.
Oda har brukt strategien dobling/halvering. Vi kan bruke like grupper-modellen for å forklare at strategien hennes stemmer og ser på $5 \cdot 24$ som det totale antall epler i fem poser med 24 epler i hver pose. Ved å dele innholdet i hver av de fem posene likt i to mindre poser, får vi nå ti poser. I hver av disse posene er det halvparten så mye som det var i de store posene, altså 12 epler i hver av de små posene.



Nå har vi 10 poser med 12 epler hver, dvs. $10 \cdot 12 = 120$. Siden vi ikke har lagt til eller tatt bort noen epler, bare gruppert dem på en annen måte, må det være like mange epler i ti poser med 12 epler i hver, som det var i fem poser med 24 epler i hver pose.

Mer generelt har hun brukt det som kalles assosiativitet for multiplikasjon: $5 \cdot 24 = 5 \cdot (2 \cdot 12) = (5 \cdot 2) \cdot 12 = 10 \cdot 12 = 120$.

c) Gi et representasjonsbevis for den distributive egenskapen til multiplikasjon med utgangspunkt i regnestykket $12 \cdot 16$.
For at det skal være et gyldig representasjonsbevis må tre krav være oppfylt:
- Betydningen av den involverte operasjonen er representert tydelig
- Strategien det argumenteres for kommer tydelig fram
- Representasjonen kan generaliseres
Punktene trenger ikke bli listet opp, men de må være tilfredsstilte for å få full uttelling.

Den distributive egenskapen for multiplikasjon som vi vil argumentere for her er at man kan dele opp den ene faktoren og multiplisere den andre faktoren med hvert av leddene i den første faktoren:

$$12 \cdot 16 = (10 + 2) \cdot 16 = 10 \cdot 16 + 2 \cdot 16$$

Vi ser $12 \cdot 16$ som det totale antall muffins på et bakebrett der muffinsene er plassert i 12 rader med 16 muffinser på hver rad. For å finne ut det totale antall muffins kan vi først regne ut hvor mange muffins det er på de 10 første radene, og siden det er 16 muffins på hver rad blir det $10 \cdot 16 = 160$ muffins på de 10 første radene. Da er det to rader igjen, med 16 muffins på hver rad, så det er $2 \cdot 16 = 32$ på de to siste radene. Til sammen på bakebrettet er det 160+32=192 muffins. Det totale antallet er det samme uansett om vi regner ut alle muffinsene på en gang ($12 \cdot 16$) eller om vi deler opp og regner ut først 10 rader og så 2 rader ($10 \cdot 16 + 2 \cdot 16$), for vi har ikke lagt til noen muffins og ikke tatt bort noen muffins.

Vi kan argumentere for at denne strategien gjelder for alle multiplikasjonsstykker med heltall, fordi uavhengig av hvor mange muffins det er på hver rad og hvor mange rader med muffins vi har, så kan vi alltid regne ut noen rader først, og så resten av radene seinere.

Oppgave 2

a) Forklar forskjellen på målingsdivisjon og delingsdivisjon. Forklaringen din må inneholde eksempler på begge typer.

I målingsdivisjon vet vi hvor stor hver gruppe er og skal finne ut hvor mange av de vi får. For eksempel at vi har 12 boller vi skal fordele i poser som har plass til fire i hver. Hvor mange poser trenger vi da?

I delingsdivisjon er det motsatt. Vi vet hvor mange grupper vi har og vil finne ut hvor store de er. Hvis vi fortsetter med samme eksempel kan vi si at vi har 12 boller vi skal legge i poser, og de har vi 4 av. Hvor mange boller blir det i hver pose da?

(Det kunne nok vært formulert bedre, så gjerne gjør det om dere vil)

b) Løs $168: 8$ ved bruk av to ulike strategier. Alle steg i resonnementene må begrunnes tydelig.

En god besvarelse på oppgaven viser to varierte og godt begrunnede strategier. Eksempel kan være å bruke en regnefortelling der vi har for eksempel 160 kroner som skal deles likt mellom 8 personer. Det er 16 tikroner og 8 en-kroner. De vet at de 16 tikronene gir 2 tikroner til hver, og de 8 enkroningene gir 1 krone til hver. Da ender de opp med 21 kroner hver.

Andre aktuelle strategier kan være å bruke for eksempel halvering (den assosiative egenskapen til divisjon 168:8 = 168:(2·4) = 168:2:4), eller å bruke standardalgoritmen, men merk at alle resonnementer skal begrunnes. Ved bruk av standardalgoritmen vil det bety at hvorfor algoritmen virker må begrunnes.

c) Vi er i en 4.klasse. Klassen arbeider med innledende divisjon av positive heltall. Elevene har arbeidet med følgende oppgave:

Det er 12 elever som skal dele likt 252 klinkekuler. Klinkekulene kommer enkeltvis eller i poser med ti klinkekuler i hver pose. Hvor mange klinkekuler får hver elev?

Etter at elevene har jobbet i smågrupper en stund samler læreren dem i lyttekroken. Følgende dialog utspiller seg:

1. Lærer: Hvem vil starte? Silje, hva har dere gjort?
2. Silje: Vi tok 10 gange 12 som er 120. Så tok vi 10 gange 12 igjen, og 120 pluss 120 er 240. Da er det igjen bare 12, som er èn til hver.
   [Lærer skriver på tavla:
   $10 \cdot 12 = 120, 120 + 120 = 240,\ 12 \text{ klinkekuler igjen}$]
3. Lærer: Takk Silje. En annen strategi? Snu deg til din skulderpartner. Se på det Silje har gjort. Kan dere forklare hvordan hun har tenkt?
   [Etter 2 minutter ber læreren Karen om å si hva hun og hennes partner har kommet fram til.]
4. Karen: Hun tok 10 gange 12, som er 120. En gang til blir 240, da er det bare 12 igjen.
5. Lærer: Takk, Karen. Enn dere Amin, hva har dere tenkt?
6. Amin: Som Karen, og at det først blir 10 kuler på hver. Neste gang blir det 20, pluss den siste kula, og da blir det 21.
7. Lærer: Takk Amin, ja de siste 12 kulene delt på 12 elever blir en kule til hver.
8. Lasse (ivrig): Jeg gjorde sånn, jeg tenkte på hvor mange tierposer det er i 252. Og det er 25. 2 gange 12 er lik 24.
9. Silje (avbryter): Men det er jo bare 5 tiere i 252. Det er det midterste tallet som sier hvor mange tiere det er.
10. Lasse: Ja, men det er tiere i hundrerne også, i 100 klinkekuler er det 10 poser. Det er 10, 20.
11. Lærer: Det var interessant. Du fant først ut hvor mange tierposer det var, og så fant du ut hvor mange poser med ti klinkekuler hver elev fikk. Du tenkte slik?
    [Skriver på tavla:
    $25 : 12 = 4$ med 1 pose igjen]
12. Lasse: Ja.
13. Silje: Jeg vet hva du kan gjøre med den siste posen. Du tar den sammen med de to siste kulene, da har du 12. Så det blir en til hver, så da har hver elev 2 poser med ti og 1 løs klinkekule. Altså 21 klinkekuler.
14. Lærer: Dette var interessante strategier. Gå tilbake til gruppene og lag en plakat av ulike strategier for å løse denne oppgaven.

i. Drøft hva som er likt og hva som er ulikt i strategiene til Silje og Lasse.

ii. Hva kan være ett matematikkfaglig mål for samtalen? På bakgrunn av det, diskuter om samtalen er en produktiv matematisk samtale.

Merk: Det ble oppdaget en skrivefeil i denne oppgaven. I dialogens utsagn 11, helt avslutningsvis står det (Skriver på tavla: 25: 12 = 4 med 1 pose igjen). Dette skal åpenbart være (Skriver på tavla: 25: 12 = 2 med 1 pose igjen). Denne feilen ble oppdaget tidlig under eksamensgjennomføringen, og ble opplyst tydelig til alle kandidater etter ca. en time av den totale eksamenstiden på seks timer. Det vurderes til ikke å ha påvirket kandidatenes mulighet til å prestere optimalt på denne oppgaven, og tillegges ikke vekt i vurderingen.

i.

Silje: teller oppover i steg, 10 ganger 12, så igjen 10 ganger 12. Adderer i steg på 120 til 240 som er nært til 252. så tar hun differansen på 12 (252-240) som hun deler på 12 personer. Det kommer ikke frem hvor mange kuler det blir per person til slutt.

Lasse splitter 252 i 25 tiere og 2 enere. Han fordeler de 25 tierne først på de 12 personene. Han vet at 2 ganger 12 er 24 og bruker det – 2 tierposer til hver. Silje tar ordet og hvis Lasse har tenkt som henne, så er det å tenke på en tierpose som 10 enere og det er 2 enere til, altså 12 kuler som fordeles på 12. 21 kuler til hver.

Strategiene nokså ulike, bortsett fra den siste delen med 12 kuler. Lasse benytter 10-posene fra konteksten, altså benytter posisjonssystemet. I tillegg bruker han multiplikasjon og tallfaktakunnskap fra den lille gangetabellen. Han utnytter dermed både relasjon mellom divisjon og multiplikasjon, og posisjonssystemet. Silje bruker også multiplikasjon (10 ganger 12) og posisjonssystemet (hun ganger jo med 10 og det er nok ikke tilfeldig), men Lasse gjør det i mye større grad.

ii.

Studentene blir bedt om å formulere ett faglig mål i samtalen, og det er ikke åpenbart her hva dette må være. Det viktige her er at studentene våger og være konkret i å formulere et mål, og ikke bare nevner en masse ulike momenter. Mulige faglige mål kan være:

- Bruk av regnefortellinger for å skape mening til en regneoperasjon, undersøke mulige strategier og se hva som kan gjøres/ikke gjøres.
- Utforskning av regnestrategier i divisjon generelt og sammenligning av dem.
- I regnefortellingen er kulene i poser på ti, noe som kan invitere til strategier som gjør nytte av posisjonssystemet, altså det å fordele tiere (tiere blir da betraktet som ett objekt/unitizing)
- Utvikle en regnestrategi i divisjon som går på å dele opp det første tallet, strategien kan etter hvert bli veldig nær standardalgoritmen i divisjon.
- Begrunne/argumentere for de regnestrategiene som kommer i samtalen, vise ut fra regnefortellingen hvorfor strategiene virker

Det kan eventuelt nevnes noen mål som ikke er direkte matematiske, men som kan være viktige for matematikklæring som det å sette ord på egen strategi, ta stilling til andres resonnement, høre på hverandre.

Samtalen kan karakteriseres som en produktiv samtale siden det legges opp til diskusjon om noen sentrale aspekter ved divisjon og diskusjonen går på undersøkelse, forståelse, bruk av ulike representasjoner og diskusjonen om hvorfor noe er slik det er (ikke bare en oppskrift og trening på den).

For å fremme de faglige målene, bruker læreren flere av kommunikasjonsteknikker og noen eksempler av disse er:

- linje 3: læreren får frem flere strategier slik at de kan sammenlignes. Hun skriver tydelig på tavla Siljes (og senere Lasses) strategi, akkurat slik elevene sier det men med matematiske symboler, slik at det blir mulig å sammenligne og diskutere

- linje 3-4: parsamtale der man skal sette seg inn i en strategi og drøfte det

- linje 11: «revoicing» dvs. læreren omformulerer noe en elev sier slik at det gis en alternativ ordlegging/oppsummering som kan hjelpe noen elever til å være med i diskusjonen videre. En liten utvidelse også i det læreren skriver på tavla, at det er en pose igjen.

Oppgave 3

a) Sorter følgende brøker i stigende rekkefølge. Du skal argumentere for løsningen din uten å bruke fellesnevner, uten å gjøre om til desimaltall og uten å basere argumentasjonen på en tegning alene.

$$\frac{5}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{4}{7}$$

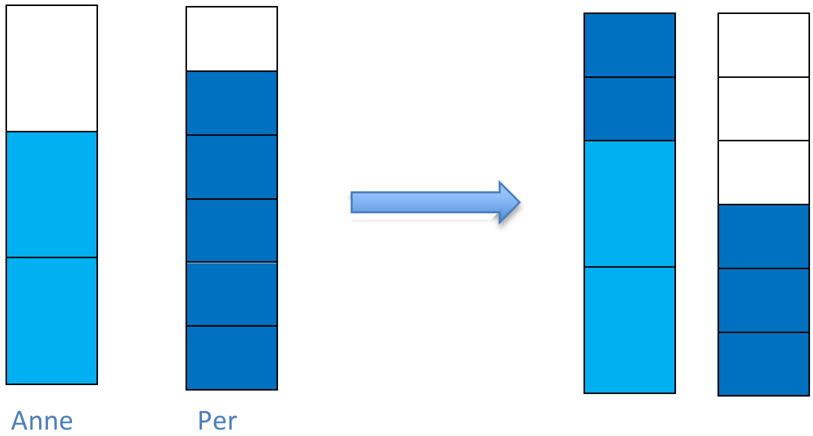
Først kan vi legge merke til at alle brøkene er ganske nærme $\frac{1}{2}$, så vi kan bruke sammenlikning med $\frac{1}{2}$ som strategi. $\frac{2}{5}$ er den eneste brøken som er mindre enn en halv. Vi vet at den er mindre enn en halv fordi halvparten av 5 er 2,5, og 2 er mindre enn 2,5. $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{7}$ og $\frac{4}{7}$ er alle større enn en halv. $\frac{5}{7}$ er større enn $\frac{4}{7}$ fordi bitene i begge brøkene er like store, vi har delt en enhet i sju like store biter, men i $\frac{5}{7}$ er det én flere bit enn i $\frac{4}{7}$. $\frac{5}{7}$ er også større enn $\frac{5}{8}$ fordi hvis vi deler en enhet i sju like store biter blir bitene større enn hvis vi deler den samme enheten i åtte like store biter. I begge brøkene har vi fem biter, men bitene i $\frac{5}{7}$ er større enn bitene i $\frac{5}{8}$. Hvilken brøk er størst av $\frac{5}{8}$ og $\frac{4}{7}$? Her kan vi for eksempel bruke at begge brøkene mangler tre biter på en hel, men bitene i $\frac{4}{7}$ er større, så denne brøken mangler mest på en hel. Da må $\frac{5}{8}$ være større enn $\frac{4}{7}$. Man kan også sammenlikne med en halv.

Brøkene i stigende rekkefølge: $\frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{7}$

b) Lag en kontekst/regnefortelling til hvert av regnestykkene under, og resonner deg frem til svaret ved hjelp av disse kontekstene:

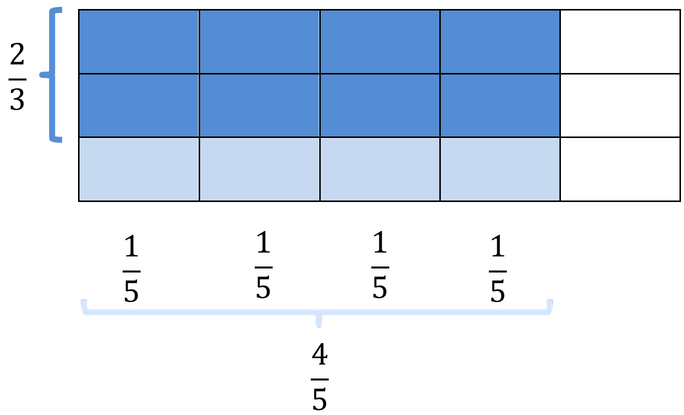
i. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

Forslag til kontekst: I skolelunsjen hadde Anne med $\frac{2}{3}$ liter melk, og Per hadde med $\frac{5}{6}$ liter melk. Hvor mange liter melk hadde de med til sammen? For å finne ut hvor mye melk det blir til sammen fyller vi først over litt av melka Per hadde med i Anne sin kartong, sånn at det blir 1 liter i den kartongen. I kartongen til Anne er det plass til $\frac{1}{3}$ liter melk for at det skal bli 1 liter i den. Siden $\frac{2}{6}$ og $\frac{1}{3}$ er like mye, fyller vi over $\frac{2}{6}$ liter fra kartongen til Per i kartongen til Anne. Da er det igjen $\frac{3}{6}$ liter melk i kartongen til Per. $\frac{3}{6}$ er like mye som $\frac{1}{2}$, og vi vet at vi har 1 hel og $\frac{1}{2}$ liter til sammen. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = 1\frac{1}{2}$.



ii. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$

Forslag til kontekst: Ola skal klippe $\frac{4}{5}$ av plenen i hagen. Før lunsj klipper han $\frac{2}{3}$ av de $\frac{4}{5}$. Hvor mye av hele plenen har Ola klippet før lunsj? Her ser vi brøk som operator, der $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$ kan uttrykkes som $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$. Vi kan se for oss plenen som et rektangel, der de $\frac{4}{5}$ Ola skal klippe er markert. For å finne ut hvor mye $\frac{2}{3}$ av dette er, deler vi hver femdel i tre like store biter. Nå er hele plenen delt opp i femten like store biter, der 12 av disse femtendelene skal klippes. Vi kan tenke at Ola har klippet to biter på hver av de fire femdelene han skal klippe, for da har han klippet $\frac{2}{3}$ av hver femdel. Dette betyr at han har klippet åtte biter der hver bit er $\frac{1}{15}$ av hele plenen. Da vet vi at Ola har klippet $\frac{8}{15}$ av hele plenen, og $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.



c) Elever i en 5.klasse har jobbet med oppgaven $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. Under ser du hva Marit har gjort.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \cancel{\frac{1\frac{1}{2}}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{3} - \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{3}$$

Forklar alle stegene i utregninga til Marit.

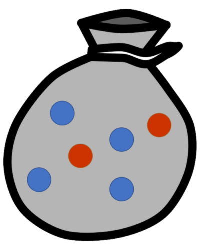
Her har Marit tenkt at $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$, så da kan vi splitte opp to tredeler til $1\frac{1}{2}$ tredel og $\frac{1}{2}$ tredel. Siden $1\frac{1}{2}$ er halvparten av 3 er $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$ det samme som $\frac{1}{2}$, og derfor kan hun vite at hvis vi tar $\frac{1}{2}$ fra $\frac{1\frac{1}{2}}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{3}$, så står vi bare igjen med $\frac{\frac{1}{2}}{3}$.

Marit ser at læringspartneren har fått svaret $\frac{1}{6}$, og spør deg om hun har regnet feil. Hvordan vil du som lærer svare Marit?

Her må det påpekes at Marit sitt svar er riktig. Videre kan man argumentere for at hennes svar og læringspartnerens svar er ekvivalente brøker, for eksempel med utgangspunkt i en illustrasjon som viser de to brøkene.

Oppgave 4

a) I en 4.klasse viser læreren frem følgende bilde på smartboard, og følgende dialog utspiller seg i lyttekroken.



Lærer: Tenk dere at dere skal trekke en kule fra posen i blinde. Hvilken farge tror du at du får på kula?
Trond: Jeg tror jeg får blå
Lærer: Kan du si noe mer om hvordan du tenker?
Trond: Jeg liker blått best.
Ida: Jeg tror jeg får rødt, for det er favorittfargen min.
Trond: Men det er flere blå kuler.
Lærer: Hva tror dere andre?

Filip: Jeg kan jo ikke vite sikkert, men det er jo dobbelt så mange blå som røde kuler, så sjansen er størst for at jeg får blå.

Yasmin: Jeg er enig med Filip. $\frac{4}{6}$ av kulene er blå, så sjansen er størst for blå.

Analyser de ulike elevenes forståelse for sannsynlighet, slik det kommer til uttrykk i det korte dialogutdraget.

En naturlig start på dette delspørsmålet er å si noe om den faktiske sannsynligheten for å trekke rød og blå kule. Man kan vanskelig foreta en analyse av elevers forståelse slik de kommer til uttrykk i elevutsagn uten å ha sagt noe om oppgavens løsning, eksplisitt eller implisitt.

Analysen av elevutsagnene bør videre gå i detalj om i hvilken grad elevens utsagn sier noe om den relative frekvensen, forholdet mellom røde og blå kuler, eller om de baserer seg på andre faktorer.

Vi har brukt rammeverket fra Jones m.fl. som pensum, der det opereres med fire nivåer i elevenes tenkning:

1. Subjektiv sannsynlighetstenkning – henvisning til lykkefarge, lykketall eller andre forhold som er matematisk irrelevante for situasjonen.
2. Overgang fra subjektiv til naivt kvantitativ sannsynlighetstenkning – en kvalitativ størrelsesangivelse som begrunnelse, men ikke tallfestet – «Det er flere blå kuler».
3. Uformell kvantitativ tenkning om sannsynligheter – Den kvalitative sammenlikningen fra nivå 2 blir kvantifisert – «Det er to blå kuler for hver røde»
4. Numerisk sannsynlighetstenkning – forståelse for bruk av forhold, tallfesting i form av en andel, ikke bare et antall.

Det er ikke sentralt at studentene i besvarelsen husker navnene på de ulike nivåene, men en forståelse for innholdet i dem bør komme til uttrykk i analysen av elevene.

Trond: Hans første begrunnelse, «Jeg liker blå best», indikerer at han kunne befinne seg på nivå 1, men senere argumenterer han for valget sitt med at det er flere blå kuler. Han baserer seg derfor også på en kvalitativ begrunnelse, noe som gjør det naturlig å plassere han på nivå 2.

Ida: Baserer seg på favorittfarge, og ettersom dette også er feil valg med tanke på hva som er mest sannsynlig, er det naturlig å plassere Ida som subjektivt sannsynlighetstenkende. Basert på hennes ene utsagn i dialogen gir hun oss ingen indikasjoner på noe annet.

Filip: Kvantifiserer sammenlikningen mellom de to fargene, gjennom at han sier at det er dobbelt så mange blå som røde kuler. Han uttrykker det imidlertid ikke som et forhold, så på bakgrunn av dette ene utsagnet er det naturlig å plassere Filip på nivå 3. Filip viser dessuten god forståelse for stokastiske forsøk, gjennom at han sier at man ikke kan vite sikkert. Her viser han at han forstår at hendelser med lavere sannsynlighet også vil inntreffe.

Yasmin: Bygger videre på Filips utsagn, men tallfester sannsynligheten som et forhold, som brøk. Numerisk sannsynlighetstenkning.

b) Tenk deg at du skal trekke to kuler fra posen i figur 2. Hva er sannsynligheten for at du får to kuler av lik farge? Det må fremgå tydelig av besvarelsen hvordan du har tenkt.

Dette kan løses på flere ulike måter. Vi kan sette opp utfallsrommet og se hvor mange av utfallene som er to like farger. Hvis vi kaller kulene for B_1, B_2, B_3, B_4, R_1 og R_2, så får vi skilt på de kuler av samme farge. Utfallsrommet blir da:

$$\left\{\begin{matrix} B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_1R_1, B_1R_2, \\ B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, B_2R_1, B_2R_2, \\ B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_3R_1, B_3R_2, \\ B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3, B_4R_1, B_4R_2 \\ R_1B_1, R_1B_2, R_1B_3, R_1B_4, R_1R_2, \\ R_2B_1, R_2B_2, R_2B_3, R_2B_{4,}R_2R_1 \end{matrix}\right\}$$

Vi ser at 14 av de 30 utfallene har lik farge, og sannsynligheten for dette er derfor $\frac{14}{30} = \frac{7}{15}$ eller $46{,}7\%$.

Andre fremgangsmåter kan være ved bruk av telletre eller valgtre, eller utregning ved å bruke betinget sannsynlighet. Det siste har imidlertid ikke vært vektlagt i pensum eller undervisningen, og kan ikke forventes. Men dersom noen studenter skulle vise seg å ha brukt dette, så forventes det en forklaring på hva man gjør og hvordan man har tenkt, ikke bare en ren utregning.