Institutt for lærerutdanning

Sensurveiledning i MGLU1103/LGU11100 Matematikk 1 (1-7) emne 1A, vår 2018

Oppgave 1

a) Lag en kontekst til multiplikasjonsstykket $36 \cdot 2{,}5$, og bruk konteksten til å løse multiplikasjonsstykket på to ulike måter. Begrunn at alle stegene i utregningene er matematisk gyldige med utgangspunkt i konteksten.

En god besvarelse tar i bruk en kontekst som gir mening til tallene og operasjonen, og som fremhever det matematiske. Et eksempel på en kontekst kan være at man har 36 brusflasker med 2,5 liter i hver, og $36 \cdot 2{,}5$ er det totale antallet liter brus.

Multiplikasjonsstykket skal løses på to forskjellige måter, og alle stegene skal begrunnes med utgangspunkt i konteksten. Kandidaten viser større bredde ved å velge to løsningsstrategier som baserer seg på forskjellig idé i multiplikasjon. Mulige løsningsstrategier:

1. Denne løsningsstrategien har utgangspunkt i den distributive egenskapen ved multiplikasjon, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, at man kan dele opp den ene faktoren og gange den andre faktoren med hvert av de nye leddene og legge sammen til slutt.

   Vi regner ut og begrunner med utgangspunkt i konteksten. Vi kan tenke at for å finne ut hvor mange liter brus det er, finner vi ut hvor mange liter brus det er i 10 flasker om gangen. I 10 flasker vil det være $10 \cdot 2{,}5 = 25$ liter brus. I de neste 10 flaskene vil det også være 25 liter, og også i de neste 10 flaskene. I de første 30 flaksene er det da $3 \cdot 25 = 75$ liter med brus. Da må vi finne ut hvor mange liter brus det er i de siste 6 siste flaskene. I to flasker er det $2 \cdot 2{,}5 = 5$ liter, og hvis vi legger til to flasker til er det 10 liter, og de siste to flaskene gir 15 liter til sammen på de siste 6 flaskene. Siden det er 75 liter brus i 30 flasker, og 15 liter i 6 flasker, er det til sammen 75+15=90 liter brus i de 36 flaskene. Hvis vi regner ut 10 og 10 og 10 og 6 flasker om gangen og adderer til slutt, får vi det samme antallet liter med brus som om vi skulle regnet alle 36 flaskene på en gang, for det er ikke lagt til noe brus eller tatt bort noe brus, og vi har regnet med alle flaskene med brus.

2. Denne løsningsstrategien baserer seg på den assosiative egenskapen ved multiplikasjon, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, den strategien vi kaller dobling/halvering i multiplikasjon: $36 \cdot 2{,}5 = (9 \cdot 4) \cdot 2{,}5 = 9 \cdot (4 \cdot 2{,}5) = 9 \cdot 10$.

For å finne ut hvor mange liter brus det er i de 36 flaskene, kan vi slå sammen fire og fire flasker med brus i en større bøtte. I fire flasker er det $4 \cdot 2{,}5 = 10$ liter med brus, så i hver bøtte er det 10 liter med brus siden vi har helt 4 flasker med brus i den. Når vi heller fire og fire flasker med brus i hver bøtte, er det fire ganger så mange flasker som bøtter, altså trenger vi bare 36:4=9 bøtter. Nå har vi 9 bøtter med 10 liter brus i hver, og til sammen har vi da $9 \cdot 10 = 90$ liter brus. Om vi slår sammen fire og fire flasker i en større bøtte før vi regner ut, så vil ikke det totale antallet liter med brus endre seg, for vi har ikke tatt bort noe brus eller lagt til noe brus, bare fordelt brusen på en annen måte.

b) Marte, en elev i 4. klasse, utbryter «Du se her! Hvis jeg tar $9 \cdot 9$ får jeg 81, men hvis jeg tar $8 \cdot 10$ får jeg 80. Og samme med $5 \cdot 5$ som er én større enn $4 \cdot 6$». Beskriv sammenhengen Marte har funnet her, og gi et representasjonsbevis for denne sammenhengen.

Sammenhengen Marte har funnet her er at hvis man multipliserer to like faktorer, vil produktet bli én mer enn produktet man får om man senker den ene faktoren med én og øker den andre faktoren med én. Kandidaten må formulere sammenhengen på en entydig måte med et presist språk.

Et representasjonsbevis må ta utgangspunkt i en modell, tegning eller regnefortelling, og oppfylle følgende krav:

1. Operasjonen kommer tydelig fram i representasjonen
2. Strategien/sammenhengen det argumenteres for må fremkomme av den valgte representasjonen
3. Strategien/sammenhengen må kunne generaliseres til å gjelde en hel klasse av eksempler.

For eksempel kan vi ta utgangspunkt i at $9 \cdot 9$ er én mer enn $8 \cdot 10$, og like grupper som modell for multiplikasjon. Da kan vi si at vi ser $9 \cdot 9$ som det totale antall drops i 9 poser med 9 drops i hver (1).

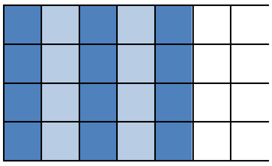
Hvis vi tar den ene posen, og legger ett drops fra den i hver av de andre posene, vil vi kunne dele ut ett drops i hver av de åtte andre posene, og ha ett drops igjen i den posen vi delte fra. Nå har vi 8 poser med 10 drops i hver, og 1 drops ved siden av. Vi ser at 9 poser med 9 drops i hver, er totalt ett mer drops enn 8 poser med 10 drops i hver.

Dette vil gjelde generelt for alle multiplikasjonsstykker med to like faktorer. Det er fordi det i utgangspunktet var like mange drops i hver pose som det var antall poser, og når vi åpner den ene posen er det én mindre pose å fordele dropsene på, og da kan vi dele ut ett drops i hver av de andre posene, og sitte igjen med ett ekstra. Vi har nå én pose mindre enn i utgangspunktet, men vi har ett drops mer i hver av posene. Vi har også ett drops til overs. Det totale antall drops i poser som inneholder like mange drops som antall poser, er derfor én mer enn det totale antall drops hvis vi finner ut hvor mange drops det er i én færre poser med ett mer drops i hver. Derfor er produktet av to like faktorer én mer enn produktet der man har senket den ene faktoren med én og økt den andre faktoren med én.

c) Marte utforsker mye i forbindelse med multiplikasjon for tiden, og spør en dag om det alltid vil være sånn at et tall i firegangen bare kan slutte på sifrene 0, 2, 4, 6 og 8. Hvordan kunne du svart Marte? Gi et argument for påstanden din.

Påstanden til Marte stemmer. Ettersom oppgaven spør hvordan man kunne svart Marte, burde kandidaten ta utgangspunkt i en undervisningsforklaring i argumentasjonen. Undervisningsforklaringer er slik at de belyser de matematiske ideene på en god måte, benytter egnede eksempler og representasjoner, og alle stegene i løsningsprosessen er tydeliggjort i den valgte representasjonen.

I undervisningsforklaringa må de matematiske ideene tydeliggjøres på en god måte, og i denne påstanden, må da et tall i 4-gangen representeres på en hensiktsmessig måte. Et tall i 4-gangen er et tall som kan skrives som $4 \cdot noe$ eller som $noe \cdot 4$, og her velger vi et rutenett med fire rader som representasjon. Siden rutenettet har fire rader, vil det være fire ruter i hver kolonne bortover. Et rutenett med 1 kolonne tilsvarer $1 \cdot 4$, et rutenett med 2 kolonner tilsvarer $2 \cdot 4$ og så videre.



....

For et rutenett med 0 kolonner får vi $0 \cdot 4 = 0$ ruter, 1 kolonne gir $1 \cdot 4 = 4$, for et rutenett med 2 kolonner får vi $2 \cdot 4 = 8$, for et rutenett med 3 kolonner får vi $3 \cdot 4 = 12$ ruter, 4 kolonner gir $4 \cdot 4 = 16$ og 5 kolonner gir $5 \cdot 4 = 20$ ruter. Da har vi at de første 5 rutenettene gir 0, 2, 4, 6 og 8 som siste siffer. Ettersom 5 kolonner gir 20 ruter, vil mønsteret med siste siffer repeteres for rutenettene med de neste 5 kolonnene. Det er fordi 20 er to tiere, og uansett hvilket tall vi legger til grupper med tiere, så vil ikke tierne påvirke det siste sifferet.

Dette kan vi argumentere for at gjelder alle positive tall i 4-gangen, fordi uansett hvor mange kolonner man har i rutenettet, kan man se det som hele grupper med 5 og 5 kolonner i tillegg til 0, 1, 2, 3 eller 4 kolonner. Da får vi at siste siffer er 0, 2, 4, 6 eller 8 for alle positive tall i 4-gangen

Oppgave 2

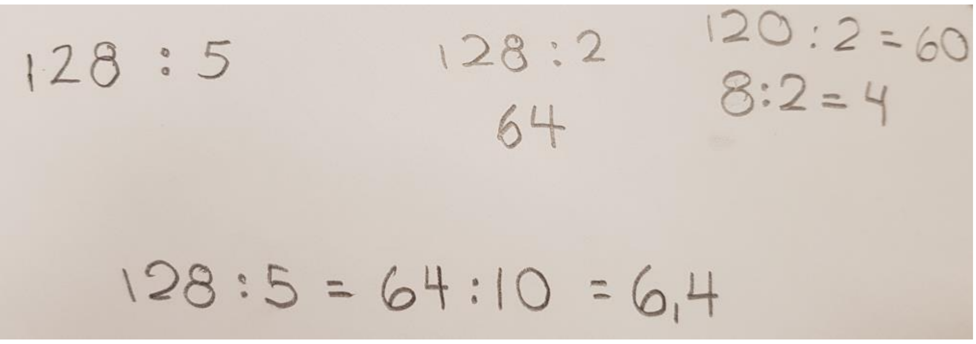
a) Lag en delingsdivisjonskontekst og en målingsdivisjonskontekst til divisjonsstykket 153: 9, og ta utgangspunkt i én av kontekstene for å løse oppgaven. Begrunn at alle steg er matematisk gyldige med utgangspunkt i konteksten.

Delingsdivisjonskontekst: 153 roser skal deles i 9 buketter. Hvor mange roser blir det i hver bukett?

Målingsdivisjonskontekst: 153 roser skal deles i buketter med 9 i hver. Hvor mange buketter?

Løser ved hjelp av målingsdivisjon. Lager først 10 buketter, da har vi brukt $10 \cdot 9 = 90$ roser. Da har vi igjen 63 roser som skal deles i buketter. 63 roser holder til 7 buketter. Da har vi delt ut alle rosene, og vi har 10+7=17 buketter med 9 roser i hver.

b) Rudolf har løst divisjonsoppgaven $128: 5$ på følgende måte.



Analyser Rudolfs løsningsstrategi – hvordan har han tenkt, og hva kan være årsaken til at han har tenkt slik? Hvordan vil du som lærer svare Rudolf, slik at du hjelper han med å utvikle en hensiktsmessig strategi for $128: 5$ som er matematisk korrekt?

Rudolf har først funnet ut hva halvparten av 128 er, ved å først dele 120 på 2, og så 8 på 2, for å deretter legge sammen kvotientene. Her finner han ut at halvparten av 128 er 64. Deretter ser det ut som at Rudolf har brukt strategien dobling/halvering som er gyldig i multiplikasjon.

Et svar til Rudolf burde basere seg på bruk av en hensiktsmessig representasjon for divisjon, der det vil fremkomme av representasjonen at strategien dobling/halvering ikke er gyldig for divisjon.

c) Ta utgangspunkt i regnestykket $72: 6$ og gi et representasjonsbevis for regnestrategien som baserer seg på distributiv egenskap i divisjon.

Representasjonsbeviset må tilfredsstille de tre kravene som beskrevet i oppgave 1b. Distributiv egenskap i divisjon: $(a + b): c = a: c + b: c$. Vi kan ta utgangspunkt i å regne ut $72: 6$ ved å ta $60: 6 + 12: 6$, og begrunne at strategien er gyldig.

Velger en målingsdivisjonskontekst som utgangspunkt. Vi kan tenke på 72:6 som antall taustumper vi får hvis vi deler et tau på 72 meter i taustumper som er 6 meter lange.

Vi kan tenke at første deler vi opp 60 meter av tauet i stumper på 6 meter. Da får vi 60:6=10 stumper. Vi kan dele opp de resterende 12 meterne i stumper på 6 meter, og da får vi 12:6=2 stumper. Til sammen har vi da delt 72 meter med tau i 12 stumper som er 6 meter lange.

Denne strategien kan generaliseres til å gjelde alle divisjonsstykker. Vi kan alltid dele deler av tauet i taustumper med ønsket lengde, før vi deler resten av tauet i like lange taustumper. Antall taustumper summen av antall taustumper på første del av tauet og antall taustumper på andre del av tauet. Til sammen har vi da delt hele tauet i taustumper med ønsket lengde, og antall taustumper blir like mange som om vi skulle delt hele tauet inn i taustumper med en gang.

Oppgave 3

a) Sammenlikn brøkene under uten å skrive som desimaltall, prosent, eller utvide til felles nevner eller felles teller. Ranger brøkene i stigende rekkefølge (fra minst til størst).

$$\frac{11}{5} \quad \frac{11}{6} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{9}{5} \quad \frac{13}{6}$$

Vi kan begynne med $\frac{11}{6}$ og $\frac{13}{6}$. Siden begge brøkene består av like store biter, vil den brøken som har flest slike biter være størst. Altså er $\frac{13}{6}$ større enn $\frac{11}{6}$.

$\frac{11}{5}$ er en brøk som er litt større enn 2, fordi $\frac{10}{5}$ er som 2 hele, og $\frac{11}{5}$ er da $\frac{1}{5}$ større enn 2. På samme måte kan vi argumentere for at $\frac{13}{6}$ er $\frac{1}{6}$ større enn 2. Hvis en enhet er delt i fem like store deler vil bitene være større enn om vi deler den samme enheten i seks like store biter. Derfor er $\frac{1}{5}$ større enn $\frac{1}{6}$ og $\frac{11}{5}$ er større enn $\frac{13}{6}$.

Foreløpig rangering: $\frac{11}{6} \quad \frac{13}{6} \quad \frac{11}{5}$

$\frac{7}{3}$ er $\frac{1}{3}$ større enn 2. Ved samme argument som over, vet vi derfor at $\frac{7}{3}$ er større enn $\frac{11}{5}$.

$\frac{9}{5}$ er $\frac{1}{5}$ mindre enn 2, mens $\frac{11}{6}$ er $\frac{1}{6}$ mindre enn 2. Siden $\frac{1}{6}$ er mindre enn $\frac{1}{5}$, er $\frac{11}{6}$ nærmere 2 enn $\frac{9}{5}$, og $\frac{9}{5}$ er derfor mindre enn $\frac{11}{6}$.

Rangering: $\frac{9}{5} \quad \frac{11}{6} \quad \frac{13}{6} \quad \frac{11}{5} \quad \frac{7}{3}$

b) Lag en kontekst til regnestykkene og løs oppgavene ved hjelp av kontekstene. Begrunn at alle steg er matematisk gyldige med utgangspunkt i kontekstene.

i. $\frac{2}{3} + \frac{5}{9}$

Her er det viktig at det er tydelig i konteksten hva som er enheten, og at den gir mening til operasjonen.

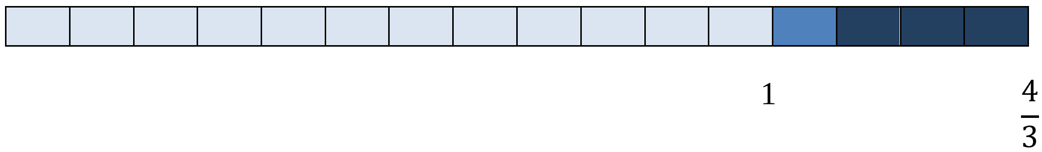
F.eks.: Lise har $\frac{2}{3}$ liter og Per har $\frac{5}{9}$ liter vann, hvor mye vann har de til sammen? Vi kan regne ut ved å tenke at vi heller vannflaskene i en bøtte. Først heller vi Lise sin vannflaske i bøtta, da er det $\frac{2}{3}$ liter i bøtta. Siden 3 går 3 ganger i 9, vet vi at 3 er $\frac{1}{3}$ av 9, og at $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Hvis vi fyller $\frac{3}{9}$ liter vann fra flaska til Per i bøtta, er det nå 1 liter vann i bøtta. Da er det igjen $\frac{2}{9}$ liter vann i flaska til Per, og til sammen er det $1\,\frac{2}{9}$ liter vann.

ii. $\frac{4}{3} - \frac{1}{4}$

Her er det også viktig at konteksten tydelig viser hva enheten er, og at den gir mening til operasjonen.

For eksempel kan konteksten være at noe om at Ola går $\frac{4}{3}$ km hjemmefra på tur, også snur han og går $\frac{1}{4}$ km tilbake. $\frac{4}{3} - \frac{1}{4}$ forteller hvor langt hjemmefra han er nå.

Vi kan bruke en lengdemodell for å resonnere oss frem til svaret.



Hvis vi deler hver tredel i fire like store deler, får vi at det er $\frac{12}{12}$ på en kilometer, og $\frac{4}{12}$ på $\frac{1}{3}$ km. Siden 3 går 4 ganger i 12, vet vi at $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Når Ola har gått $\frac{4}{3}$ km, har han gått $\frac{1}{3}$ lenger enn 1 km, altså $\frac{4}{12}$ lenger enn 1 km. Når han går $\frac{1}{4}$ km tilbake, går han $\frac{3}{12}$ km tilbake, og da er han $\frac{1}{12}$ lenger hjemmefra enn 1 km. Svaret på regnestykket $\frac{4}{3} - \frac{1}{4}$ er derfor $1\,\frac{1}{12}$.

c) Lag en kontekst til regnestykkene og løs oppgavene ved hjelp av kontekstene. Begrunn at alle steg er matematisk gyldige med utgangspunkt i kontekstene.

i. $\frac{1}{5} \cdot 2{,}5$

Her vil det være hensiktsmessig å lage en kontekst der vi ser den første brøken som operator. For eksempel at vi drikker $\frac{1}{5}$ av 2,5 liter vann. Hvor mye vann vi drikker er svaret på regnestykket $\frac{1}{5} \cdot 2{,}5$. Vi kan tenke oss at vi deler opp de 2,5 literne med vann i flasker på $\frac{1}{2}$ liter. Vi får 5 slike halvlitersflasker av 2,5 liter vann. Derfor er $\frac{1}{5}$ av 2,5 liter lik $\frac{1}{2}$ liter, og $\frac{1}{5} \cdot 2{,}5 = \frac{1}{2}$

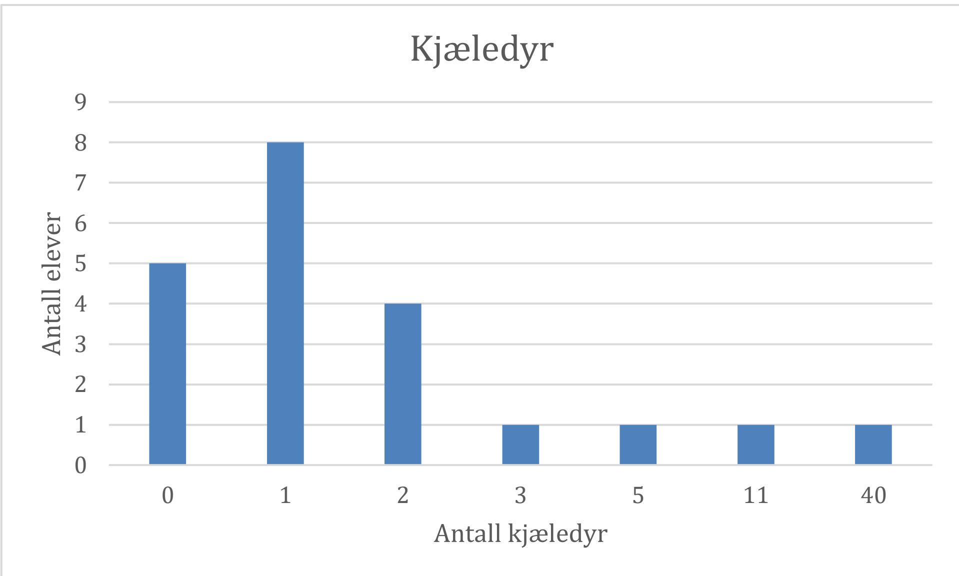
ii. $\frac{5}{2}:\frac{5}{6}$

Her vil det være hensiktsmessig å lage en kontekst med målingsdivisjon. For eksempel: Hvor mange skjerf som er $\frac{5}{6}$ meter lange kan vi lage av et langt skjerf som er $\frac{5}{2}$ meter langt?
$\frac{5}{6}$ m er $\frac{1}{6}$ m kortere enn 1. $\frac{5}{2}$ meter er $\frac{1}{2}$ meter lenger enn 2. Hvis vi lager 2 skjerf først, har vi brukt opp $\frac{2}{6}$ mindre enn 2 meter av skjerfet. Da har vi igjen $\frac{2}{6}+\frac{1}{2}$ meter som vi kan lage skjerf av. Hvis vi deler 1 meter i 6 like store deler, ser vi at det trengs 3 biter for å få $\frac{1}{2}$ meter. Derfor er $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ m. Til sammen har vi derfor igjen $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$ meter med skjerf, og dette er nok til akkurat ett skjerf til som er $\frac{5}{6}$ meter langt. Vi fikk da 3 skjerf som var $\frac{5}{6}$ meter lange, og svaret på $\frac{5}{2}:\frac{5}{6}$ er 3.

Oppgave 4

I klasse 7b på en skole litt utenfor Trondheim har elevene samlet inn data om hvor mange kjæledyr hver elev har. Under ser du en presentasjon av datamaterialet.

Navn	Antall dyr
Sara-Marte	1
Kristin	0
Helena	40
Truls	1
Martin	1
Stian	2
Oddrun	0
Øystein	2
Olaug	1
Cathrine	5
Bjarte	3
Renate	11
Vigdis	1
Vemund	2
Heide	0
Mina	0
Stina	1
Lotte	2
May	1
Gustav	0
Karl-Erik	1



a) Beskriv fire perspektiver på data som elever kan ha. Eksemplifiser de ulike perspektivene med utgangspunkt i datamaterialet over.

De fire perspektivene på data:

1. Data som assosiasjonsredskap: elevene peker til en situasjon som ikke nødvendigvis henger sammen med datamaterialet, og sier ting de ikke har belegg for å si. En elev

med dette perspektivet på data vil for eksempel kunne si for datamaterialet over at 2 er yndlingstallet til Lotte.

2. Data som casebeskrivelse: Eleven beskriver enkeltcaser i datamaterialet, men sier ingenting om trendene. En elev med dette perspektivet på data vil for eksempel kunne si at Oddrun har 0 kjæledyr.
3. Data som grupperingsredskap: Her vil eleven si noe om hvor mange det er i hver kategori, og gjerne se på ekstremverdiene. For eksempel vil en elev kunne si at én elev har 3 kjæledyr, og at flest elever har 1 kjæledyr.
4. Data som et sett av observasjoner: Her ser eleven dataene i sammenheng med hverandre og på hyppigheten til enkelverdier i forhold til det samlede datasettet. For eksempel vil en elev med dette perspektivet på data kunne si at 8 av 21 elever har 1 kjæledyr, altså har mer enn hver tredje elev 1 kjæledyr.

b) Hva blir de ulike sentralmålene (typetall, median, gjennomsnitt) for datamaterialet over? Hvilke(t) sentralmål gir best bilde av datamaterialet?

Typetall er den kategorien som går igjen oftest. For dette datasettet er det flest elever som har 1 kjæledyr, derfor er 1 typetallet.

Hvis vi rangerer alle verdiene fra lavest til høyest vil medianen være den verdien som er i midten av datasettet (eller snittet av de to som er i midten for datasett med partall antall verdier). Medianen er den verdien som har halvparten av datasettet over seg og halvparten av datasettet under seg. De sorterte dataene her er:

0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 5 11 40

Her er 1 den verdien som er i midten av datasettet, og derfor er 1 medianen.

Gjennomsnittet kan vi se på som en utjevning av datamaterialet, eventuelt et balansepunkt i datamaterialet. Utjevninga kan vi gjøre ved å for eksempel ta de største verdiene og fordele litt utover de andre verdiene. Tar vi for eksempel alle de 40 og fordeler 2 på hver av de 20 andre verdiene blir datasettet:

2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 5 7 13 0

For å jevne ut litt mer, kan vi ta 3 av de 13 og fordele over på den verdien som før var 40, men nå er 0. I tillegg kan vi ta 6 til fra verdien som er 13 og fordele 1 på hver av de 5 som før var 0 og nå er 2, og 1 på en av de som var 1, men nå er 3. Datasettet nå:

3 3 3 3 3 4 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 5 7 4 3

Vi ta 1 fra 5-ern og plasserer på en 3-er, og 3 fra 7-ern og fordeler over tre 3-ere. Datasettet nå:

4 4 4 4 3 4 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 3

Etter vi har fordelt ganske jevnt har vi 12 verdier med 4, og 9 med 3, så gjennomsnittet er litt mer enn 3,5.

Vi ser at gjennomsnittet avviker ganske mye fra medianen og typetallet. Hvis vi ser på det samlede datamaterialet, virker medianen og typetallet mer representativt for datamaterialet enn gjennomsnittet.