NTNU
Fakultet for lærer- og tolkeutdanning

Emnekode(r):	LGU11100-A
Emnenavn:	Matematikk 1 (1-7) emne 1A
Studiepoeng:	15
Eksamensdato:	10.mai 2016
Varighet/Timer:	6
Målform:	Bokmål
Kontaktperson/faglærer: (navn og telefonnr på eksamensdagen)	Kristin Krogh Arnesen (469 32 840) Yvonne Grimeland (481 14 352)
Oppgavesettet består av: (antall oppgaver og antall sider inkl. forside)	3 oppgaver og er på 4 sider.
Vedlegg består av: (antall sider)	Ingen vedlegg

Hjelpemidler:
Inntil 2 A4-ark med notater, det kan skrives på begge sider. (Alt er tillatt. Håndskrevne notater, dataskrevet, kopiering fra bøker etc.)
LK06 Kunnskapsløftet

Evnt. info:

NB! Oppgaveteksten kan beholdes av studenter som sitter eksamenstiden ut. Resultatet blir gjort tilgjengelig fortløpende på studweb. når sensur er innlevert av sensor, senest første virkedag etter sensurfristen (3 uker etter eksamensdato). Lykke til!

Oppgave 1

a) Lag to regnestykker som involverer multiplikasjon som har samme svar som $14 \cdot 9$ (Regnestykket trenger ikke bestå av bare to tall som multipliseres sammen alene). Argumenter for at svaret på hvert av disse regnestykkene er det samme som svaret på $14 \cdot 9$, uten at du faktisk regner det ut.

Et fullverdig svar på denne deloppgaven må inneholde to forskjellige regnestykker som har samme svar som $14 \cdot 9$, og det må det argumenteres for at hver av regnestykkene har det samme svaret, men uten å regne det ut.

For å finne flere regnestykker som har det samme svaret vil det være naturlig å ta i bruk en eller flere egenskaper ved multiplikasjon; Assosiativitet, kommutatitvitet og distributivitet. Videre vil det i et argument for at svaret blir det samme være naturlig å ta i bruk modeller for multiplikasjon.

I et argument må det gå klart frem hvordan regnestykket er representert i modellen, og hva det er ved modellen som representerer svaret på regnestykket. Det må videre i et fullverdig argument gå klart frem hvordan man benytter seg av den valgte modellen til å gå mellom representasjonen av $14 \cdot 9$ til en representasjon av det nye regnestykket, og man må argumentere for at svaret blir det samme.

Et eksempel på en løsning:

$$14 \cdot 9 = 10 \cdot 9 + 4 \cdot 9$$

Dette regnestykket baserer seg på bruk av den distributive egenskapen. Vi kan argumentere for at svaret er det samme på følgende måte: multiplikasjonen $14 \cdot 9$ kan representeres som et rutenett som har 14 rader og 9 kolonner. Da representerer antall ruter i dette rutenettet svaret på multiplikasjonen. Det totale antall ruter i rutenettet kan også finnes ved først å finne ut hvor mange ruter det er i de ti første radene og deretter finne ut hvor mange ruter det er i de fire siste radene. Dette representerer $10 \cdot 9 + 4 \cdot 9$, samtidig som vi har tatt utgangspunkt i det samme rutenett som representerte $14 \cdot 9$, og dermed må det totale antallet ruter være det samme. Så svaret er det samme.

b) Pål har regnet ut $14 \cdot 9$ ved å flytte en ener mellom tallene, og regnet ut $13 \cdot 10 = 130$. Han sier så at svaret på $14 \cdot 9$ må være det samme som svaret på $13 \cdot 10$, altså 130.

Ta utgangspunkt i en av modellene for multiplikasjon. Skisser hvordan du ut fra denne vil arbeide med Pål slik at han kan oppdage feilen i denne måten å gjøre det på, uten at du bare regner ut svarene og viser han at det ikke stemmer?

For eksempel kan man ta utgangspunkt rutenettmodellen for multiplikasjon. I en slik modell vil $14 \cdot 9$ være representert ved et rutenett som har 14 rader og 9 kolonner. Pål sitt utgangspunkt er at han mener at $13 \cdot 10$ har samme svar som $14 \cdot 9$. Dersom disse to multiplikasjonene har samme svar må det bety at antall ruter som representerer svaret på $14 \cdot 9$ kan omorganiseres til et rutenett som representerer multiplikasjonen $13 \cdot 10$. Dette kan vi forsøke å gjøre ved å ta utgangspunkt i rutenettet som representerer $14 \cdot 9$. Vi kan ta ta den nederste raden, som har 9 ruter, og tenke oss at vi flytter den til den slik at den blir en kolonne i rutenettet. Da vil denne kolonnen ha 9 ruter nedover. Men de 9 andre kolonnene vil nå ha 13 ruter nedover. Altså har vi nå forsøkt å endre rutenettet til å representere $13 \cdot 10$, men vi mangler 4 ruter for å få det til. Altså klarer vi ikke å representere $13 \cdot 10$ med et rutenett der det totale antallet ruter er $14 \cdot 9$. Altså kan ikke svaret på $14 \cdot 9$ finnes slik som Pål foreslår.

Et fullverdig svar må ta i bruk en modell og bruke modellen aktivt til å vise hvordan man kan se at svaret ikke blir som Pål tror. Det er ikke et fullverdig svar å si noe om hvordan man generelt vil arbeide med eleven. Et fullverdig svar må detaljert vise hvordan man vil ta i bruk en modell for multiplikasjon for å belyse Pål sin misoppfatning.

c) Sigrid samler på klinkekuler i små poser. Hun har 17 poser med fire klinkekuler i hver pose. Sigrid synes det begynner å bli upraktisk med så mange poser, og kjøper seg fire store poser. Når hun fordeler klinkekulene sine i de fire posene, viser det seg til Sigrids overraskelse at det akkurat går opp med like mange klinkekuler i hver pose.

Denne situasjonen er en gylden anledning til å arbeide med en viktig egenskap ved multiplikasjon. Forklar hva denne egenskapen går ut på. Hvordan vil du jobbe med Sigrid for at hun skal utvikle forståelse for at denne egenskapen gjelder generelt?

Dette er en gylden anledning til å arbeide med den kommutative egenskapen ved multiplikasjon.
Kommutativitet sier oss nettopp det Sigrid har erfart, at 17 poser med 4 klinkekuler kan fordeles i 4 poser med nøyaktig 17 klinkekuler i hver pose.

En forklaring på hva den kommutative egenskapen går ut på må gå ut over det symbolske for å være fullstendig. Det vil være naturlig å støtte seg på en modell for multiplikasjon i en forklaring.

Videre vil det i et arbeid med Sigrid der målet er at hun skal utvikle forståelse for at denne egenskapen gjelder generelt være sentralt å gjennomføre et representasjonsbevis i lag med Sigrid. Et representasjonbevis har 3 deler som må komme klart frem:

- Betydningen av den involverte operasjonen går tydelig frem av en valgte representasjonen/konteksten/regnefortellingen/konkretene
- Strategien/sammenhengen/egenskapen det argumenteres for kommer tydelig frem i representasjonen, og konklusjonen følger av representasjonen.
- Representasjonen kan generaliseres/tilpasses til å gjelde for en hel klasse med eksempel, for eksempel alle hele tall.

I dette tilfellet kan man argumentere ved å bruke posemodellen på følgende måte: Sigrid kjøper 4 store poser. I hver av de gamle posene er det 4 klinkekuler. Sigrid fordeler klinkekulene i de 4 store posene ved å åpne en av de gamle posene og fordele en klinekule fra den gamle posen i hver av de nye posene. Da vil hver nye store pose få nøyaktig en klinkekule fra hver av de små posene. Altså må hver av de nye store posene inneholde like mange klinkekuler som det var små poser. Siden det er like mange store poser som antall klinkekuler i hver av de små posene går dette akkurat opp. Videre fullfører man representasjonsbeviset ved å argumentere for at dette kan man gjøre uansett hvilke hele tall man har i multiplikasjonen.

Oppgave 2

a) Lag to regnefortellinger til stykket $52:5$, der den ene regnefortellingen er en målingsdivisjon, og den andre er en delingsdivisjon. Velg en av regnefortellingene, og bruk denne til å resonnere deg frem til en løsning på oppgaven.

En delingsdivisjonsoppgave er en regnefortelling der dividenden og divisoren har forskjellige benevninger, f.eks. fordeling av 52 kr på 5 personer. Hvis de har samme benevning, for eksempel å dele ut 52 kr slik at vi gir 5 kr til hver gruppe, blir det målingsdivisjon. Her er begge eksemplene satt i en kontekst med penger som skal fordeles, men det er ikke noe krav om at de to oppgavene skal ha et felles tema. Det som er viktig er at det er én av hver type, og at det kommer klart fram hvilken som er hvilken type.

Slik kan man resonnere på delingsdivisjonsoppgaven over: Først kan vi fordele 50 kr til de 5 personene, de får 10 kr hver. Da har vi 2 kr igjen, som er 200 øre, når vi deler 200 på 5 får de 40 øre hver. Tilsammen blir det 10,40 kr eller 10 kr 40 øre hver.

Det er viktig at resonnementet foregår i konteksten, altså at man ikke f.eks. bruker standardalgoritmen for å finne svaret uten å knytte det til regnefortellingen.

b) Drøft hvorfor det er viktig at elevene møter og jobber med både delings- og målingsdivisjonskontekster.

Selv om divisjonskonseptet kom med delingsdivisjon som utgangspunkt, er det slik at elevene kommer til å møte reelle situasjoner som krever forståelse av målingsdivisjon (den omvendte situasjonen, hvor de kun jobber med målingsdivisjon, er tilsvarende også utilstrekkelig).

I tillegg trenger de forståelse for målingsdivisjon når de skal arbeide med divisjon av brøk og desimaltall, hvor delingsdivisjon ikke gir mening.

Videre er det også et viktig moment at målings- og delingsdivisjon i praktise kontekster åpner for forskjellige løsningsstrategier, og at det kan være hensiktsmessig å vurdere hvilken divisjonstype elever kan ha best utbytte av å møte i det tidlige arbeidet med divisjon. I delingsdivisjon vil en typisk strategi være å dele ut en og en til det antallet som skal dele det man har, mens i en målingsdivisjonskontekst kan man ta ut en og en gruppe med objekter til man har brukt opp det man har. En målingsdivisjon vil derfor kunne ha færre forhold eleven trenger å holde oversikt over i løsningsprosessen.

c) Gitt dialogen under d). Hva kan det matematiske målet til læreren være i denne økta? Vær så presis som mulig. Er samtalen produktiv? Drøft hvorfor/hvorfor ikke. Drøftingen må forankres i aktuelt pensum om produktive matematiske samtaler.

Det matematiske målet her kan være at elevene skal kunne forstå i sammenhengen (her sagt med symboler) $(a+b):c = a:c + b:c$ i divisjon gjelder. Dette kan også sies med ord: Hvis vi har et divisjonsstykke, så kan vi finne svaret på divisjonsstykket vårt ved å dele dividenden opp i to deler, og deretter dele hver del på opprinnelig divisor og til slutt addere svarene på de to mindre divisjonsstykkene.

Også noen andre strategier/sammenhenger dukker opp underveis her når elevene skal begrunne svarene sine (f.eks. i linje 6-10), men det virker sannsynlig at det er sammenhengen beskrevet over som er lærerens overordnede matematiske mål.

For å avgjøre om samtalen er produktiv, bør man ta utgangspunkt i de fire kriteriene fra side 2 i *Intentional Talk* (Kazemi & Hintz), side 2, og evt. i arket med kriterier fra *Classroom discussions* som ble delt ut i klassen.

Det første punktet er at en produktiv samtale skal nå et matematisk mål. Her bør man observere at selv om læreren nok prøver å styre klassen mot en generalisering av sammenhengen/strategien beskrevet over, så kommer klassen aldri i mål med argumentet for denne. Læreren oppmuntrer elevene til å gi en regnefortelling som skal hjelpe den, men denne regnefortellingen blir aldri brukt til å få fram argumentet læreren er ute etter. Til slutt er det én elev (Olivia) som ser en sammenheng mellom stykkene læreren har gitt, men hun blir ikke utfordret til å argumentere for denne, og det hele ender med at læreren oppsummerer en strategi uten at de har argumentert for at den stemmer.

Vi kan egentlig konkludere ut fra dette at samtalen ikke er produktiv, men la oss også se på de andre kriteriene for en produktiv matematikksamtale: Læreren får elevene til å dele tankene sine, spør etter forklaringer (linje 7) og gjentar elevenes resonnementer (linje 9). Læreren hjelper elevene til å orientere seg mot hverandre (linje 36). Læreren lar alle elevene uttrykke seg, og tar alle innspill på alvor. Dessuten bruker læreren mange «talk moves», som f.eks. at elevene skal diskutere to og to, at de skal få bruke tid på å tenke, m.m. Man bør diskutere om læreren klarer å få med flere elever i resonnementene. Det bør brukes konkrete sitater/linjenummer fra dialogen til å understøtte påstandene.

Oppsummert kan vi si at selv om samtalen ikke er produktiv, har den mye bra i seg. Læreren jobbet bevisst mot et mål, og kan reflektere over samtalen etter timen og fortsette mot målet i neste økt. Så det er ikke bra å være fordømmende mot læreren i besvarelsen sin. Å strengt kritisere læreren for å ikke gå mer i dybden på strategiene elevene bruker underveis, er heller ikke bra, for det kan like gjerne bety at læreren prioriterte det matematiske målet for økta framfor stadige avsporinger og repetisjon.

d) Dialogutdraget avsluttes med at læreren tydeliggjør strategien elevene har oppdaget. I linje 28 gir Maja en regnefortelling, men denne blir ikke brukt til å vise at strategien gjelder generelt. Bruk Majas regnefortelling som utgangspunkt for et representasjonsbevis som viser at strategien alltid er gyldig.

Majas regnefortelling er: *6 søsken får 96 kroner som de skal dele med hverandre. Det blir 96:6 kroner på hver av dem*. Vi må knytte dette opp mot strategien beskrevet i punkt c). Vi tar utgangspunkt i tallene fra dialogen, altså

$$96:6 = 60:6 + 36:6$$

Vi kan tenke oss at de seks søsknene får de 96 kronene i to deler, f.eks. 60 kroner fra far, og 36 kroner fra mor (evt. 60 kr i tiere, og 36 enkroner, eller en annen grunn). Så deler de hver bunke/mynttype/del mellom seg, og da får hver enkelt $60: 6 + 36: 6$ kroner. Dette må være det samme som $96: 6$ kroner, siden vi vet det er 96 kroner til sammen. Bruken av regnefortelling som argument bør sees i lys av kriteriene for representasjonsbevis (Enge og Valenta, *Argumentasjon og regnestrategier*):

- Betydning av den involverte operasjonen er representert tydelig: Ja, vi vet at vi regner ut $96: 6$. Det er viktig at regnefortellingen inkluderer dette regnestykket, for hvis vi starter med «vi får først 60 kroner og så 36 kroner», er ikke regnefortellingen en representasjon av $96: 6$. (Dette blir naturligvis omvendt dersom man har formulert sammenhengen på oppgave 2c) som at $a: c + b: c$ er det samme som $(a + b): c$).
- Strategien det argumenteres for kommer tydelig fram: Dette sikrer vi gjennom å dele opp totalbeløpet i to, som hver fordeles mellom søsknene.
- Representasjonen kan bli generalisert: Dette må nevnes eksplisitt, dersom vi hevder å ha gitt et argument for en regnestrategi generelt (og det er det oppgaven spør etter). Her er det klart at det vi gjør ikke er avhengig av hvor mye som skal fordeles totalt, eller hvor mye som er fra far og hvor mye som er fra mor. Heller ikke av hvor mange søsken det er. Det kan kommenteres (men kreves ikke) at dersom vi deler opp det totale beløpet i to delbeløp som ikke er delelige på antall søsken, blir det mer upraktisk å bruke denne regnefortellingen som argument.

Det er ikke nødvendig å eksplisitt liste opp disse kriteriene, men de må være tilfredsstilt for å få full uttelling. Generaliseringen må sies eksplisitt (det er altså ikke nok at argumentet *kan* generaliseres uten at det faktisk nevnes).

1. Lærer: Nå skal jeg skrive opp et regnestykke på tavla. (Skriver $25: 5$ på tavla) Kan noen si meg svaret på dette stykket? Ja Per?
2. Per: Det er 5 fordi $5 \cdot 5$ er 25.
3. Lærer: Er alle enige i det?
4. De fleste elevene i klassen nikker.
5. Lærer: Ok. Hva med dette da: (Skriver $100: 5$ på tavla)
6. Yasmin: Det er 20!
7. Lærer: Okei, 20 sier du, kan du forklare hvordan du kom frem til det svaret?
8. Yasmin: Jeg tenkte at 10 delt på 5 er 2 og så la jeg bare på en null.
9. Lærer: Så når 5 går to ganger opp i 10 så må det være ti ganger så mye når du skal finne ut hvor mange ganger 5 går opp i 100. Var det slik du tenkte?
10. Yasmin: Eh … Ja, det var det jeg mente.
11. Lærer: Jeg setter nå opp et tredje regnestykke på tavla. Denne gangen er det viktig at alle skal få tid til å tenke, så ingen rekker opp hånda før det har gått et halvt minutt. (Skriver $125: 5$ på tavla, venter et halvt minutt)
12. Lærer: Nå vil jeg at dere skal prate med sidemannen og fortelle hverandre hvordan dere tenkte for å løse denne oppgaven. Husk at det kan være flere måter å komme frem til svaret på. (Lar elevene diskutere i par)
13. Lærer: Ok … Er det noen som vil fortelle sin metode?
14. Henrik: Jeg og Martine tenkte det samme. Vi kan bare legge sammen 5 og 20 som er 25.
15. Lærer: Ok, så svaret på $125: 5$ er 25?
16. Henrik: Ja.
17. Lærer: Kan du forklare hvordan du kom frem til det?
18. Henrik: Ja. På de to regnestykkene vi regnet ut først var fant vi ut at $25: 5$ er 5 og at $100: 5$ er 20. Når man legger disse sammen blir det det samme som $125: 5$.
19. Lærer: Det var en lur måte å tenke på! Forsto alle det som Henrik forklarte?

20. Selma: Jeg skjønte litt, men ikke alt.
21. Lærer: Det er greit. Vi skal se på et par regnestykker til. Her er et. (Skriver på tavla: $36: 6$)
22. Linus: Det er 6, fordi $6 \cdot 6$ er 36.
23. Lærer: Mhm, og dette da: (Skriver på tavla: $60: 6$)
24. Olivia: Den var lett. Det er 10.
25. Lærer: (Skriver på tavla: $96: 6$) Ikke rekk opp hånda med en gang. La alle få litt tid på seg. (Venter et minutt.)
26. Lærer: Snakk sammen to og to. Nå vil jeg at dere skal prøve å lage en regnefortelling som viser hvordan dere har tenkt. (Lar elevene diskutere i noen minutter.)
27. Lærer: Maja og Alexander, jeg hørte at dere hadde tenkt ut en regnefortelling. Vil dere dele den med klassen?
28. Maja: Ja, vi tenkte at 6 søsken får 96 kroner som de skal dele med hverandre. Det blir 96:6 kroner på hver av dem.
29. Lærer: Det var en fin regnefortelling. Hvordan har dere tenkt når dere skal løse den?
30. Maja: De må dele da … vi regner ut $96: 6$ … Det blir 16.
31. Alexander: Eller vi kan bare dele ut pengene, en krone til han og en krone til han og så videre.
32. Lærer: OK. Men husker dere de to stykkene vi gjorde i stad?
33. Alexander: $125: 5$?
34. Lærer: Nei, jeg tenkte på de som står på tavla her. $36: 6$ og $60: 6$. Kan vi bruke dem kanskje? Noen som ser?
35. Olivia: Jeg vet det! $96: 6$ blir jo 16. Og $36: 6$ er 6, og $60: 6$ er 10, det blir $6 + 10$ som er 16.
36. Lærer: Hmm, kanskje du har oppdaget en sammenheng Olivia? Kan noen andre forklare med egne ord hva Olivia har sett? Ja Alexander?
37. Alexander: Eeh … jeg tror hun sier at … Du kan legge sammen svarene på de andre stykkene da. Og så blir det svaret på det andre, på $96: 6$.
38. Lærer: Kjempebra Alexander. Ser dere at det var akkurat det som skjedde i stad også? På $125: 5$?
39. Olivia: Ja, for det var $5 + 20$ og det var svarene på $25: 5$ og $100: 5$.
40. Lærer: Ikke sant. Nå har vi funnet ut noe lurt. Dette gir oss nemlig en god strategi å bruke når vi har store tall som vi skal dele på noe. Vi kan gjøre tallet litt mindre der hvor vi ser enkle løsninger, og så addere svarene vi får på de nye stykkene og så får vi svaret!

Oppgave 3

a) Sett brøkene under i stigende rekkefølge. Du skal argumentere for løsningen din uten å bruke fellesnevner, uten å gjøre om til desimaltall og uten å basere argumentasjonen på en tegning alene.

$$\frac{5}{12} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{6}{11}$$

Det er lett å se at $\frac{5}{12} < \frac{5}{9}$, fordi begge består av fem deler, men en nidel er større enn en tolvdel (dette må nevnes). Videre er det naturlig å sammelikne brøkene med $\frac{1}{2}$, siden alle tre er ganske nær denne. Vi ser at $\frac{5}{12}$ er den eneste av de tre brøkene som er mindre enn $\frac{1}{2}$, så den er altså minst av de tre. Da trengs bare å sammenlikne de to andre brøkene.

Vi ser at $\frac{5}{9}$ er *en halv nidel* større enn $\frac{1}{2}$, mens $\frac{6}{11}$ er *en halv ellevedel* større enn $\frac{1}{2}$. Siden nideler er større enn ellevedeler, er en halv nidel større enn en halv ellevedel. Dermed er $\frac{5}{9}$ større enn $\frac{6}{11}$, og vi ender opp med følgende ordning:

$$\frac{5}{12} < \frac{6}{11} < \frac{5}{9}$$

På denne oppgaven er kriteriene for hva som kreves klart gitt i formuleringen av oppgaven. Noen vil sikkert likevel ha gjort en blanding, f.eks. først skilt ut $\frac{5}{12}$ som den minste av brøkene og deretter bruke fellesnevner for å sammenlikne de to siste. Det kan også være noen som utvider brøkene for å lage felles teller, eller utvider brøkene for å lage «hele deler» (f.eks. en attendel istedenfor en halv nidel). Det er greit, så lenge det argumenteres for hvorfor brøkene er ekvivalente. Merk at å bruke fellesnevner alene som argument ikke vil gi uttelling på denne oppgaven.

b) Betrakt regnestykket $\frac{4}{7} - \frac{1}{12}$.
Estimer svaret uten å regne det ut (er svaret større/mindre/i nærheten av for eksempel $\frac{1}{2}$, 1,1 $\frac{1}{2}$ …). Begrunn hvordan du kommer frem til estimatet.

Svaret på regnetykket er i nærheten av en halv. Brøken $\frac{4}{7}$ er nær en halv. Mer presis, så er $\frac{4}{7}$ en halv sjudel mer enn en $\frac{1}{2}$. Ein halv sjudel er det samme som en fjortendedel. Vi skal trekke fra en tolvdel. En tolvdel er litt større enn en fjortendedel, så dermed vil svaret være mindre enn en halv, men samtidig ganske nær en halv.

c) Lag en passende kontekst/regnefortelling og bruk den til å resonnere deg fram til svaret på regnestykket

$$\frac{5}{2} : \frac{1}{3}$$

Når vi gjør divisjon med brøk, er det best å velge målingsdivisjonsskontekster (delingsdivisjon der noe skal deles på et antall grupper som ikke er helt, er vanskelig). Så vi velger en kontekst der vi har $\frac{5}{2}$ av noe, som skal fordeles i deler som hver er på $\frac{1}{3}$ (pass på at de to brøkene i konteksten har samme helhet). Typiske eksempler:

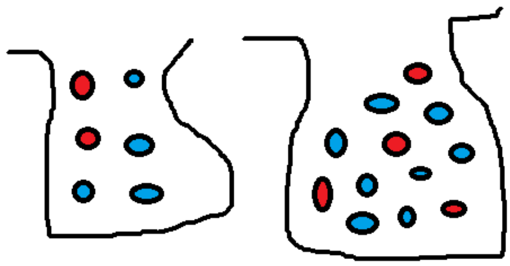
- Vi har $\frac{5}{2}$ meter tau, som skal kuttes i deler på $\frac{1}{3}$ meter. Hvor mange taubiter blir det?
- Vi har $\frac{5}{2}$ liter saft (for eksmepel 5 flasker med saft som hver er en halv liter), som skal fordeles i kanner som hver tar $\frac{1}{3}$ liter. Hvor mange kanner blir det?

Hva som skjer med resten i stykket, er avhengig av konteksten. Her ser den første ut til å runde ned svaret til antall hele taubiter, mens den andre kan få et svar av typen «tre og en halv kanne». Imidlertid kan det være hensiktsmessig å kommentere eventuelle forskjeller i svaret som konteksten gir på oppgaven og svaret på det abstrakte regnestykket.

Konteksten vil indikere hvilken modell det er naturlig å bruke. Det første eksempelet over, gir typisk en lengdemodell, mens det andre eksempelet gir en arealmodell (men det er lov å bruke sin favorittmodell her, det viktigste er at man bruker konteksten på et eller annet vis). Det er også mulig å resonnere kun ut fra konteksten, uten å bruke en modell, men mange finner nok at en tegning kan støtte resonnementet eller deler av resonnementet. Det er ikke greit å argumentere ut fra en tegning *alene*, selv om man har vært aldri så nøyaktig.

Vi gjør resonnementet for det andre eksempelet: Vi har at $\frac{5}{2}$ liter er det samme som $2\frac{1}{2}$ liter. De 2 hele literne blir til sammen 6 mugger, siden 3 mugger rommer én liter til sammen. Da står vi igjen med $\frac{1}{2}$ liter som skal fordeles på mugger. Siden $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, vil vi først fylle en mugge til. Nå er vi oppe i 7 hele mugger. Vi står igjen med en rest på $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ liter. Dette kan vi argumentere for (bør nevnes kjapt) at blir $\frac{1}{6}$ liter. Når vi da til slutt heller denne sjettedels literen med saft opp i en mugge som rommer $\frac{1}{3}$ liter, blir den akkurat halvfull – en sjettedels liter er jo halparten av en tredels liter. Svaret på oppgaven er altså $7\frac{1}{2}$ (mugge).

d) Elever i femte klasse jobber med følgende oppgave: Du har posene på bildet under. I den ene posen er det 6 kuler, der to er røde og 4 er blå. I den andre posen er det 12 kuler, der 4 er røde og 8 er blå. Hvis man skal trekke en kule fra én av posene, hvilken pose gir størst sannsynlighet for å trekke rød?



Elevene i klassen kommer med følgende utsagn. Velg tre av elevene og analyser hvilke forståelser disse elevene viser for sannsynlighetsbegrepet.

En god besvarelse av dette delspørsmålet må innholde en forklaring på hva som faktisk er løsningen på oppgaven klassen arbeider med. Dette fordi, man vanskelig kan foreta en analyse av elevutsagn uten å ta utgangspunkt i oppgaven.
Videre bør en slik forklaring på hvilken pose som gir størst sannsynlighet for rød kule baseres på at den relative frekvensen av røde kuler er det samme i begge posene, altså at forholdet mellom røde og blå kuler er det samme i begge posene.
Analysen av elevutsagnene bør videre gå i detalj om i hvilken grad elevens utsagn sier noe om den relative frekvensen, forholdet mellom røde og blå kuler, og sammenligner disse frekvensene for de to posene. Dersom elevene ikke vektlegger dette i sine utsagn,

må analysen av utsagnet se på hva eleven veklegger i sitt utsagn om problemet, og se på om dette er relevante for å løse problemet.

Nora: Det er like stor sjanse. Posen til høyre har dobbelt så mange av hver farge som den til venstre.
Nora sier helt korrekt at det er like stor sjanse for å trekke en rød utansett hvilken pose man trekker i fra. Hun sier videre at posen til høyre har dobbelt så mange av hver farge som den til venstre. Men hun nevner ikke at forholdet mellom røde og blå kuler er det samme i begge posene. Nora sin forståelse kan betegnes som uformelt kvantitativ. Hun argumenterer korrekt ut i frå antallet som er der, men argumentet er ikke gitt som et argument der hun sammenligner relative frekvensar. Derfor er argumentet hennes et numerisk sannsynlighetsargument.
Mikkel: Først teller jeg hvor mange blå det er i hver pose. Så teller jeg de røde kulene og da finner jeg ut at det er størst sjanse i posen til venstre, for der er det færrest blå.
Mikkel ser på antall kuler i posene, og kommer frem til at posen som har færest blå kuler må det være størst sjanse for å trekke en rød kule. Hans forståelse kan sies å være naivt kvantitativ fordi han argumenterer med utgangspunkt i at det er færrest blå kuler, men uten å se antallet røde i sammenheng med antallet blå.
Yu: Sjansen er størst i den til høyre, for det er den største posen.
Yu sin observasjon er knyttet til egenskaper ved posen som ikke påvirker resultatet av trekkingen. Det kan se ut som at Yu ikke har utviklet forståelse for hvilke egenskaper det er som påvirker uttrekkingen av kuler. Derfor kan Yu sitt utsagn sies å være naivt kvantitativt. Dette fordi Yu argumenterer ut i fra en egenskap, hva som er størst/minst, men den egenskapen han ser på er ikke en som påvirker uttrekkningen av røde kuler. Vi kan også si at argumentet er subjektivt, siden egenskapen ikke har noen sammenheng med sannsynligheten.
Sofie: Det er størst sjanse i den til høyre, for der er det flest røde.
Sofie sitt utsagn kan, som Mikkel sitt, sies å være et naivt kvantitativt. Hun fokuserer på hvor mange røde kuler der er i posene, men ser ikke på sammenhengen mellom røde og blå kuler og argumentet hennes er heller ikke knyttet til den relative frekvensen av røde kuler i posene.
Una: Det er like stor sjanse, fordi at i den ene posene er det $\frac{2}{6}$ rød, og i den andre posen er det $\frac{4}{12}$ rød. Det blir det samme fordi brøkene er de samme.
Una sitt argument kan sies å være et numerisk sannsynlighetsargument. Dette fordi hun arguementerer ut i fra den relative frekvensen av røde kuler i posene. Altså sier hun at forholdet mellom røde og blå kuler er det samme i begge posene, og at det derfor er like stor sjanse for å trekke en rød kule uansett hvilken pose du trekker fra av de to.