HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Emnekode(r):	LGU11004 A
Emnenavn:	Matematikk 1 1-7
Studiepoeng:	15
Eksamensdato:	18.mai
Varighet/Timer:	6 timer
Målform:	Bokmål
Kontaktperson/faglærer: (navn og telefonnr på eksamensdagen)	Siri-Malén Høynes (73412621), Heidi Dahl (73559819)
Oppgavesettet består av: (antall oppgaver og antall sider inkl. forside)	4 sider
Vedlegg består av: (antall sider)	2 sider

Hjelpemidler:
Inntil 2 A4-ark med egne notater, det kan skrives på begge sider.
LK06 Kunnskapsløftet

Evnt. info:

NB! Oppgaveteksten kan beholdes av studenter som sitter eksamenstiden ut. Resultatet blir gjort tilgjengelig fortløpende på studweb. når sensur er innlevert av sensor, senest første virkedag etter sensurfristen (15 virkedager etter eksamensdato). Lykke til!

Oppgave 1

a. Lag en kontekst til $13 \cdot 21$ og bruk konteksten til å finne svaret.

En god besvarelse på denne oppgaven klarer tydelig å knytte den valgte konteksten til regnestykket 13·21 og bruker denne konteksten i sitt resonnement. Det må også komme tydelig frem hvordan man bruker konteksten til å avgjøre hva svaret på 13·21 er. Eksempler på kontekster kan være:

Her kan man tenke seg en kontekst der man har 13 poser med 21 klinkekuler i hver pose. Antall klinkekuler i alt vil da være svaret på multiplikasjonsstykket. Videre kan man se for seg at man tar ut en klinkekule fra hver pose. Da har man 13 poser med 20 klinkekuler og 13 klinkekuler utenfor posene. For å finne svaret på regnestykket kan man da regne ut $13 \cdot 20 + 13$.

Man kan også tenke seg et rutenett med 13 rader og 21 kolonner. Antall ruter i alt vil være svaret på multiplikasjonsstykket.

Nedenfor ser du et rutenett som lister alle heltall fra 1 til 105, i rader med sju tall i hver rad. Vi tenker oss at rutenettet utvides med flere rader med sju tall i hver rad i det uendelige.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105
…	…	…	…	…	…	…

To mindre rektangler er markert i rutenettet. Fra det øverste markerte rektangelet sammenlikner vi de to regnestykkene

$$9 \cdot 17 = 153$$
$$10 \cdot 16 = 160$$

Fra det nederste markerte rektangelet sammenlikner vi de to regnestykkene

$$60 \cdot 68 = 4080$$
$$61 \cdot 67 = 4087$$

b. Sett opp og sammenlikn tilsvarende regnestykker fra et par andre rektangler i rutenettet. Hvilke sammenhenger oppdager du? Formuler en hypotese ut fra dine oppdagelser.

Hvis man prøver å regne ut flere regnestykker på tilsvarende måte, så vil man kunne oppdage at forskjellen alltid vil være lik sju.
Her må studenten formulere en presis hypotese. Det vil si at studenten må tydelig definere forutsetningene for hypotesen og beskrive sammenhengene mellom tallene i et slikt rektangel dersom det er brukt i hypotesen. Det er viktig å bruke korrekt matematisk språk.

En mulig formulering av hypotesen kan være:
«Ta et hvilket som helst tall og multipliser det med tallet som er 8 større. Sammenlign dette med produktet du får dersom du øker den første faktoren med 1 og reduserer den andre faktoren med 1. Da vil differansen mellom de to produktene alltid være 7.»

Det er her nødvendig å redegjøre for at vi i slike små rektangler alltid vil ende opp med å multiplisere et tall med tallet som er 8 større, og at det andre produktet fås ved å øke den første faktoren og redusere den andre faktoren med en.

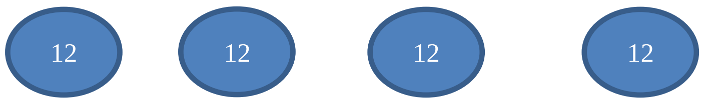
c. Gi et argument som viser at hypotesen din alltid er sann, også når vi tenker oss at rutenettet utvides som beskrevet over. Argumentet skal være forståelig for elever på mellomtrinnet.

En god besvarelse på denne oppgaven må være et matematisk gyldig bevis for påstanden, for eksempel et representasjonsbevis som skissert under. Det er viktig å bruke korrekt matematisk språk, at bruken av representasjonsformer er god og at argumentet er forståelig for elever på mellomtrinnet.

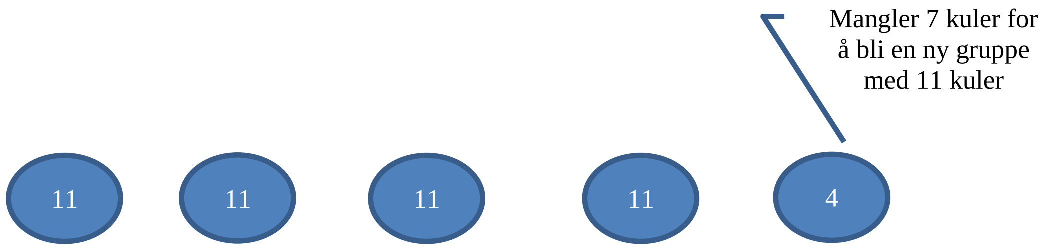
Vi bruker en modell (her er like grupper modellen brukt) for multiplikasjon for å sammenligne produktene

$$4 \cdot (4 + 8) = 4 \cdot 12$$
$$(4 + 1) \cdot (12 - 1) = 5 \cdot 11$$

Tenker på $4 \cdot 12$ som antall kuler om vi har 4 grupper med 12 kuler i hver gruppe.



Vi kan da tenke på 5 · 11 som antall kuler i 5 grupper, med 11 kuler i hver gruppe.
La oss ta utgangspunkt i de 4 gruppene med 12 kuler i hver. Vi fjerner en kule fra hver gruppe, da har vi 4 grupper med 11 kuler i hver gruppe, og 4 kuler til overs som illustrert under.



Når vi har 4 · 12 kuler mangler vi altså 7 kuler for å ha 5 · 11 kuler.

Vil vi alltid ha en forskjell på 7 kuler, uansett hvilket tall man startet med? Vi ser at antall grupper i det andre produktet alltid er en større enn antall grupper i det første. Vi ser også at antall kuler i hver gruppe alltid er en mindre i det andre produktet enn i det første (siden vi alltid øker den første faktoren med 1 og reduserer den andre faktoren med 1).

Når vi reduserer antall kuler i hver pose med 1, slik vi gjorde i eksempelet over, får vi en ny gruppe med antall kuler lik antall grupper vi startet med. Differansen mellom dette antallet og antall kuler vi skal ha i hver gruppe er lik antall kolonner i rutenettet (de to tallene, antall grupper vi startet med og antall kuler i de nye gruppene, ligger rett over hverandre i rutenettet). Siden vi har 7 kolonner i rutenettet vil vi alltid mangle 7 kuler i den nye gruppen, uansett hvilket tall vi starter på.

Oppgave 2

a. Gi to estimat for 3503:18, et som er for stort og et som er for lite. Hvordan vet du om estimatet ditt er for stort eller for lite?

En god besvarelse her har funnet to gode estimat og argumenterer godt for hvorfor estimatene er for store/for små. Det må også komme tydelig frem hvordan de to estimatene er funnet. Estimering er noe man gjør «i hodet», så det forventes at en klarer å finne estimat som er «lette» å regne ut, og det bør derfor ikke være lange utregninger i denne oppgaven (da kunne en jo like godt regnet ut det nøyaktige svaret).

b. Vi er på femte trinn og elevene jobber med divisjonsoppgaver. Læreren går bort til Sigve for å høre hvordan det går, og følgende dialog utspiller seg:

Sigve: *Se her, jeg fant ut noe lurt. Når du skal dele* 220 *på* 5*, så kan du i stedet først dele på* 10 *og så gange svaret du får med* 2*. Altså, først tar jeg* $220:10 = 22$*, og så tar jeg* $22 \cdot 2 = 44$*, og da vet jeg at* $220:5$ *er* 44.

Lærer: *Det var interessant. Da fikk du jo to lette regnestykker å regne ut. Men hvordan vet du at det stemmer?*

Sigve: *Eh, nei, jeg vet ikke helt, fordi at 10 er dobbelt av 5 kanskje?*

Lag en kontekst som passer til regnestykket $220:5$ og bruk konteksten til å vise at Sigve har rett. Argumentet ditt skal være forståelig for elever på mellomtrinnet.

En god besvarelse på denne oppgaven velger en passende kontekst og bruker den på en fornuftig måte for å argumentere for Sigve sin påstand. Det er viktig her at studenten viser at man kan finne 220:5 ved å doble 220:10, og at det i den valgte konteksten går tydelig frem hva som skjer i denne doblingsprosessen.

Å vise at 220:5 er 44 ved å bruke en kontekst på en annen måte svarer ikke på oppgaven. Det er heller ikke et fullgodt svar på oppgaven å vise at vi kan finne 220:10 ved å halvere 220:5.

c. På sjuende trinn sitter noen elever og jobber med divisjon. I en diskusjon på slutten av økta kommer en elev med følgende kommentar:

> *For å finne ut om det går an å dele et tall på 4 så holder det å sjekke de to bakerste tallene, dersom det går an å dele det tallet på 4 så går det an å dele det store tallet på 4 og. For eksempel 124; 24 kan vi dele på 4, og* $124:4 = 31$. *Men 211 kan vi ikke dele på 4, for det går ikke an å dele 11 på 4.*

Gi et argument for at det eleven observerer stemmer generelt for alle positive heltall. Argumentet skal være forståelig for elever på mellomtrinnet.

En god besvarelse på denne oppgaven må være et matematisk gyldig bevis for påstanden. Det er viktig at studenten i tillegg til å argumentere for at dette fungerer på de konkrete eksemplene gitt i oppgaven også peker på hvorfor dette vil fungere for alle positive heltall. Det forventes at studenten ikke tar for gitt at vi har distributiv egenskap i dividend, men at dette forklares ved hjelp av en relevant kontekst. «Nils Johan-divisjon» kan være nyttig her, siden vi der deler ut «litt og litt». Et eksempel på et argument ser vi under.

Vi tenker oss at vi har 124 kroner som skal fordeles på 4 elever. Da kan vi først dele ut 100 kroner. Dette går fint, siden 100 er delelig med 4. Da har vi igjen 24 kroner som deles ut, og 24 er også delelig med 4. Vi prøver nå å gi et generelt argument for at dette vil fungere uansett hva vi starter med, hvis tallet dannet av de to siste sifrene er delelig med 4. La oss tenke oss et slikt tall, og vi kan igjen bruke regnefortellingen med penger for å argumentere. Et slikt tall kan skrives som et tall med 00 som de siste sifrene addert med tallet som er dannet av de to siste sifrene (som 124 = 100 + 24). Da sitter vi med et visst antall hundrelapper og et antall kroner (tallet som er dannet av de to siste sifrene). Men 100 er jo delelig med 4, så uansett hvor mange hundrelapper vi har, kan de deles ut til de fire elevene (vi kan jo dele ut 100 kroner først, så 100 til osv. helt til vi har brukt opp alle hundrelappene). Så sitter vi til slutt igjen med det antall kroner som er dannet av de to siste sifrene i totalen vi startet med. Dette kan vi dele ut til de fire elevene hvis tallet er delelig med fire, men vi kan ikke dele ut pengene til de fire hvis tallet ikke er delelig med 4.

Oppgave 3

a. Ordne brøkene under i stigende rekkefølge, bruk resonnering – ikke gjør om til desimaltall og ikke bruk fellesnevner:

$$\frac{5}{6} \qquad \frac{3}{7} \qquad \frac{7}{8} \qquad \frac{3}{5}$$

I denne oppgaven er det ikke nok å gjøre om til desimaltall eller bruke metoden med å utvide brøkene til fellesnevner og sammenligne tellerne. Det er heller ikke nok å argumentere med en tegning alene. Det er viktig at man har gått systematisk til verks slik at man har sammenlignet alle brøkene og plassert de i forhold til hverandre.

- Brøken $\frac{3}{7}$ er minst, siden den er den eneste brøken som er mindre enn $\frac{1}{2}$.
- Brøken $\frac{7}{8}$ er større enn $\frac{5}{6}$. Begge brøkene mangler en bit for å bli en hel, men siden nevneren i $\frac{7}{8}$ er større enn nevneren i $\frac{5}{6}$ mangler det en «mindre» bit for at $\frac{7}{8}$ skal bli en hel. Sagt tydelig: $\frac{1}{8}$ er mindre enn $\frac{1}{6}$. Derfor er $\frac{7}{8}$ størst.
- Nå mangler vi bare å plassere brøken $\frac{3}{5}$. Brøken mangler $\frac{2}{5}$ for å bli en hel, mens $\frac{5}{6}$ mangler $\frac{1}{6}$ for å bli en hel. Brøken $\frac{2}{5}$ er større enn $\frac{1}{6}$, siden $\frac{1}{5}$-biter er større for enn $\frac{1}{6}$ - biter, i tillegg har vi flere (altså 2) biter. Derfor er $\frac{3}{5}$ minst, siden den mangler mest for å bli en hel når vi sammenligner med $\frac{5}{6}$.

Når vi samler all denne informasjonen kan vi sortere brøkene på følgende måte:

$$\frac{3}{7} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{8}$$

b. Les dialogen fra klasserommet til Ms Keller (se vedlegg). Hva handler samtalen om? Vil du si at dette er en produktiv matematisk samtale? Hvordan vil du begrunne at $\frac{4}{8}$ og $\frac{1}{2}$ er likeverdige brøker?

En god besvarelse her er i stand til å se at temaet for samtalen er likeverdige brøker. Når studenten skal begrunne at dette er en produktiv samtale er det ikke tilstrekkelig å peke på ulike samtaleteknikker læreren bruker, studenten må også si hvorfor det vil hjelpe elevene til å få en bedre forståelse for likeverdige brøker. Det nytter ikke å skrive «læreren stiller gode spørsmål» uten at det er forklart hvorfor det er et godt spørsmål. Studenten må også vise evne til å oppfatte og tolke den matematiske forståelsen som elevene viser i denne dialogen.

c. Lag en kontekst til $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ og resonner deg fram til svaret ved å bruke konteksten.

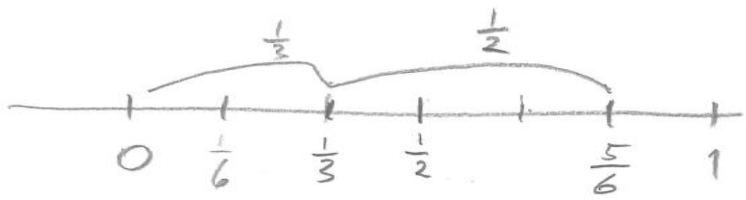
Vi kan tenke mengdemodell, der vi har 12 elever i en klasse. På en tur hadde $\frac{1}{3}$ av elevene med seg varm saft, $\frac{1}{2}$ av klassen hadde med seg varm kakao, resten hadde med seg kald drikke. Hvor stor del av klassen hadde med seg varm drikke?

(X har med varm kakao, X har med varm saft)

X X
X X
X X
X X
X X
X X

Så svaret blir $\frac{5}{6}$.

Eller vi kan tenke på Lars og Lise som begge kjøpte seg en medium sandwich, Lars spiste $\frac{1}{3}$ av sin, og Lise spiste $\frac{1}{2}$ av sin. Hvor mye sandwich spiste de til sammen? Vi bruker linjemodellen og får



d. Lag en kontekst til $2\frac{1}{4}:\frac{2}{5}$ og resonner deg fram til svaret ved å bruke konteksten.

Konteksten kan være at en har $2\frac{1}{4}$ liter saft som skal tømmes i glass som tar $\frac{2}{5}$ liter. Hvor mange glass trenger vi? Gjentatt addisjon av $\frac{2}{5}$ viser at en etter 5 glass har brukt 2 liter. Nå må en finne ut hvor mange «glass» på $\frac{2}{5}$ vi kan fylle når vi har $\frac{1}{4}$ liter saft. Nå er $\frac{2}{5}$ større enn $\frac{1}{4}$ (sammenlign med hva som mangler for å få en halv) så antall «glass» er mindre enn 1. $\frac{1}{4}$ liter er det samme som $\frac{5}{20}$ liter, $\frac{2}{5}$ er det samme som $\frac{8}{20}$ liter. Så vi får $\frac{5}{20}:\frac{8}{20}$ som er det samme som 5:8, altså $\frac{5}{8}$.

Svaret er at vi trenger $5\frac{5}{8}$ glass.

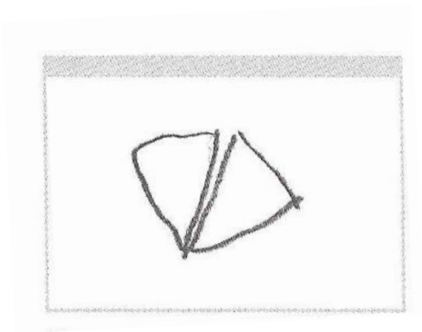
Vedlegg til eksamen LGU11004 A, 18.mai 2015

Dialog fra klasserommet til Ms Keller

Vi er i førsteklassen til Ms Keller. I de siste syv skoledagene har elevene løst og diskutert lik deling i ulike kontekster. Denne dagen får elevene dette problemet: *Seks barn har bestilt blåbærpannekaker på en restaurant. Kelneren kommer med 8 pannekaker til bordet deres. Hvis barna skal likt dele pannekakene, hvor mye får hvert barn?*

De fleste av elevene fant lett ut at hvert barn fikk 1 pannekake og så 6 dele de to siste pannekakene. Ernie delte de to siste pannekakene inn i tredeler, slik at hvert barn fikk 1 hel pannekake og så $\frac{1}{3}$ av en hel pannekake. Carmen forklarte at hun hadde delt de to siste pannekakene inn i sjettedeler, og at hun fant at hvert barn fikk 1 hel pannekake og så $\frac{2}{6}$ av en hel. Ms Keller spurte elevene om de to mengdene var like store.

1. Marie: Jeg visste det ville bli en sjettedel, fordi det er 6 barn, og hvis du ville dele likt, du kunne gjøre det i sjettedeler…men jeg vil heller ha tredeler.
2. Ms Keller: Ok, du brukte sjettedeler, men du ville eller brukt tredeler? Hvorfor vil du heller ha tredeler i stedet for sjettedeler?
3. Marie: Fordi tredeler får større deler.
4. Ms Keller: Er det riktig? Hva trur du Carmen?
5. Carmen: Vel, hvis det var slik…at hver fikk to av disse (sjettedeler) og to la dem sammen da ville det bli en halv.
6. Ms Keller: Kan du vise meg hva du tenker?
7. Carmen: [mens hun tegner figuren under] Det ville bli slik likt som en halv



   Ms Keller hentet to store papp-plater, hun satte seg ned på gulvet med elevene rundt seg.

8. Ms Keller: Dette er min store pannekake. Jeg gikk til denne restauranten, se for deg de største pannekakene du noen gang har sett. Ok, se på dette. Denne kommer til å bli litt annerledes. Jeg skal gjøre som Sally [Sally tegnet en sirkel og delte den inn i tre-deler], prøve å gjøre i alle fall [deler plata inn i tredeler]. Og i ditt tilfelle, alle fikk hva Sally?
9. Sally: En tredel
10. Ms Keller: Men da Carmen delte pannekake si [begynner å dele den andre plata]…
11. Sally [avbryter]: Alt du må gjøre er å dele de [tredelene] i halve.

12. Ms Keller: Vel ja, vent litt.
13. Sally: Slik kan du lage disse [tredelene] først og så dele hver av dem i to, og så blir det 6.
14. Ms Keller: Hva? Vent litt. La meg prøve dette. [til alle] Hørte dere hva hun akkurat sa? La meg se. Jeg prøver dette [deler i tredeler].
15. Tim: Nå bare del de i halve.
16. Sally: Ok, ta no disse 3 og del hver av dem i to, og så har du sjettedeler.
17. Ms Keller: Vil du?
18. Sally: Yeah.
19. Ms Keller [til de andre]: Enig?
20. Elever: Yeah!
21. Ernie: Ja, fordi [teller tredeler]: To, fire, seks.
22. Ms Keller: Er det sant? Ok, men Carmen, hvor mange sjettedeler fikk de?
23. Carmen: To
24. Jennifer: Det blir en av disse [en tredel].
25. Ms Keller: Hver av dem fikk en tredel.
26. Sally: Likevel er det samme mengde.
27. Ms Keller: Men Marie sa at ho helst ville være i denne gruppen [tredeler] fordi denne [peker på en tredel] er større.
28. Marie: Ja det er større stykker.
29. Kaitlen og andre: Nei.
30. Jennifer: Du får likevel samme mengde.
31. Ms Keller: Vent, Jennifer, hvorfor tror du det?
32. Jennifer: Hvis du får to av disse [sjettedeler], så blir det…, hvis du deler en av disse [en tredel] i to, så blir det … samme tingen.
33. Ms Keller: Men Marie du sa ikke det sa du ikke Marie? [Marie rister på hodet] Se her, Marie er ikke enig. Marie mener ennå at den er større, ikke sant Marie?
34. Marie: Yep.
35. Kaitlin: Nei, jeg er uenig med Marie.
36. Ms Keller: Hvorfor?
37. Kaitlin: Fordi hvis vi deler denne [tredel] i halve, så blir det likt to av disse [sjettedeler].
38. Ms Keller: Du mener at $\frac{1}{3}$ er lik $\frac{2}{6}$?
39. Elever: Ja!
40. Ms Keller: Jeg vet ikke Marie, tror du det er riktig? De sier at en person i denne gruppen får 2 av disse [sjettedeler], de for en fra denne og en fra denne, men de i den andre gruppen de får bare en bit [en tredel]. Jeg vet ikke. Hvilken del vil du helst ha Marie?
41. Marie: [peker på to deler som hver er en sjettedel] Det er likevel samme mengde.
42. Ms Keller: Så du sier til meg at $\frac{1}{3}$ er det samme som to av disse sjettedelene?
43. Marie: Ja.

Oppgave og dialog er hentet fra Empson og Levi (2011). Vår oversetting av dialogen.

Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics. Fractions and decimals.* Portsmouth, NH: Heinemann