HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG
Fakultet for lærer- og tolkeutdanning

Emnekode(r):	LGU11004
Emnenavn:	Matematikk 1 (1-7), emne 1A
Studiepoeng:	15 studiepoeng
Eksamensdato:	2. desember 2015
Varighet/Timer:	09:00-15:00
Målform:	Bokmål
Kontaktperson/faglærer: (navn og telefonnr på eksamensdagen)	Hermund Torkildsen, 73412778
Oppgavesettet består av: (antall oppgaver og antall sider inkl. forside)	3 oppgaver, totalt 10 deloppgaver. 3 sider inkludert forside
Vedlegg består av: (antall sider)	2 sider

Hjelpemidler:
Inntil 2 A4-ark med egne notater, det kan skrives på begge sider.
LK06 Kunnskapsløftet

Evnt. info: Alle oppgaver må besvares og alle svar må begrunnes. Vurderingen bygger på en helhetsvurdering av besvarelsen.

NB! Oppgaveteksten kan beholdes av studenter som sitter eksamenstiden ut. Resultatet blir gjort tilgjengelig fortløpende på studweb. når sensur er innlevert av sensor, senest første virkedag etter sensurfristen (21 dager etter eksamensdato). Lykke til!

Oppgave 1

a. Lag en kontekst til $12 \cdot 19$ og bruk konteksten til å finne svaret på multiplikasjonsstykket.

En god besvarelse på denne oppgaven klarer tydelig å knytte den valgte konteksten til regnestykket 12·19 og bruker denne konteksten i sitt resonnement. Det må også komme tydelig frem hvordan man bruker konteksten til å avgjøre hva svaret på 12·19 er. Eksempler på kontekster kan være:

Her kan man tenke seg en kontekst der man har 12 poser med 19 klinkekuler i hver pose. Antall klinkekuler i alt vil da være svaret på multiplikasjonsstykket.

Man kan også tenke seg et rutenett med 12 rader og 19 kolonner. Antall ruter i alt vil være svaret på multiplikasjonsstykket.

b. Les dialogen fra klasserommet til Mr. Crandall (se vedlegg). Hva handler samtalen om? Begrunn hvorfor dette er en produktiv matematisk samtale.

Målet for samtalen er å begrunne hvorfor vi kan dele opp den ene faktoren i multiplikasjon (det er her den andre faktoren i multiplikasjonsstykket som blir delt opp). I det multiplikasjonsstykket som er valgt er den andre faktoren delt opp i tiere og enere, så et annet mål med samtalen er å oppdage det. Det bør nevnes at dette er den distributive egenskapen, og at det er en viktig egenskap å kunne bruke i fremtidig arbeid med multiplikasjon.

En god besvarelse tar utgangspunkt i de 4 kriteriene som er beskrevet på side 2 i Intentional Talk (Kazemi&Hintz, 2014). Man må argumentere for om det matematiske målet blir oppnådd i samtalen, og om elevene klarer å dra nytte av hverandres innspill og om læreren klarer å få med flere elever i resonnementene. Argumenter/påstander bør understøttes av konkrete sitater eller relevante linjenummer i dialogen.

Det bør også kommenteres at representasjonen læreren velger er velegnet for å få innsikt i hva som skjer i konteksten, slik at elevene får mulighet til å forklare hvorfor svaret blir upåvirket av å dele opp den ene faktoren. Det er her viktig at læreren gjennom hele resonnementet lar den første faktoren være antall grupper og den andre faktoren antall i hver gruppe, og ikke bytter underveis. Vi ser også at læreren hele tiden styrer samtalen i tråd med målet for samtalen, og derfor ikke forfølger alle innspill som dukker opp. Et eksempel er i linje 21, siden målet for denne timen var knyttet til den distributive egenskapen går han ikke videre for å diskutere om 6 grupper med 19 i hver er det samme som 19 grupper med 6 i hver.

c. Mellom linje 27 og 28 i dialogen tegner Mr. Crandall en tegning som elevene kan bruke som støtte i sitt resonnement når de skal begrunne at $6 \cdot 19 = (6 \cdot 10) + (6 \cdot 9)$. Tenk nå at klassen i stedet skulle argumentere for at $6 \cdot 19 = 3 \cdot 19 + 3 \cdot 19 = 2 \cdot (3 \cdot 19)$.

Tegn en tegning som du mener kan støtte elevenes resonnement i dette tilfellet. Forklar hvordan vi kan se at $6 \cdot 19 = 3 \cdot 19 + 3 \cdot 19 = 2 \cdot (3 \cdot 19)$ ved hjelp av tegningen din.

I denne dialogen har klassen så langt tolket regnestykket $6 \cdot 19$ til å være 6 grupper med 19 i hver gruppe. En god besvarelse på denne oppgaven må derfor også benytte seg av like-grupper modellen der første faktor forteller oss antall grupper:

Det er her ingen grunn til å dele opp innholdet i hver gruppe i en gruppe på 10 og en gruppe på 9, men å vise at 6 grupper med 19 i hver er det samme som 3 grupper med 19 i hver og så 3 grupper til med 19 i hver,

og å vise at man kan lage 2 nye grupper der hver gruppe inneholder 3 grupper med 19 i hver.

Tegningen må støttes opp med en tekst som forklarer dette.

d. En elev i femteklasse stiller deg følgende spørsmål på slutten av en time:

> «Uansett hva slags tall i tregangen jeg tar, hvis jeg ganger det med et tall så får jeg fortsatt noe som er i tregangen, uansett hva slags tall jeg ganga det med. For eksempel 15, det er jo i tregangen. Hvis jeg ganger det med, for eksempel, 4. Da får jeg jo 60, og det er også i tregangen. Blir det alltid sånn? Uansett hva slags tall i tregangen jeg starta med og uansett hva slags tall jeg ganger det med?»

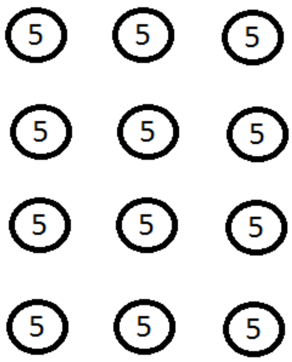
Gi et representasjonsbevis som viser at eleven har rett. Resonnementet skal være forståelig for femteklassinger.

I denne oppgaven er det viktig at studenten gjør rede for hvordan han velger å representere multiplikasjon, som gjentatt addisjon ved hjelp av en like

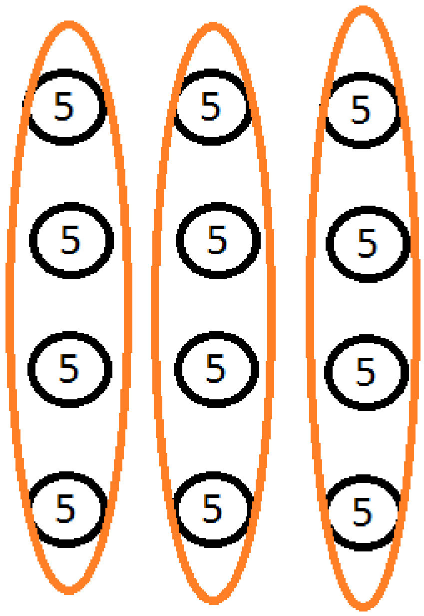
grupper-modell, eller som antall ruter i en rutenettmodell. Videre benytter vi en like grupper-modell.
Det er deretter viktig at studenten gjør rede for hva det vil si å være i tregangen, og at denne definisjonen blir brukt i argumentet. Et tall i tregangen kan for eksempel være et tall som består av 3 grupper med like mye i hver gruppe (3 · noe) eller et visst antall grupper med 3 i hver gruppe (noe · 3). Hva slags definisjon man velger vil påvirke hvordan et gyldig resonnement vil se ut. Vi vil derfor her kun vise et eksempel.

Dersom vi sier at et tall er i tregangen om det kan skrives som «3 · noe», for eksempel 3 · 5, så kan vi tenke oss at det er 3 poser med 5 kuler i hver gruppe:

Hvis vi nå ganger dette tallet (som er i tregangen) med et annet tall, for eksempel 4, får vi 4 · (3 · 5). I konteksten kan det bety at man legger 3 poser med 5 kuler i hver pose på et bord 4 ganger. Det kan illustreres slik.



Om vi sier at dette er 12 poser med 5 i hver gruppe (altså 12 · 5) er det ikke åpenbart at dette må være et tall i tregangen siden det skulle være på formen «3 · noe». Men vi ser at vi kan samle fire og fire 5-ere og få 3 · (4 · 5), og dette er fortsatt et tall i tregangen slik vi definerte det:



Vi ser at uansett hvilket tall i tregangen vi starter med så kan vi tenke på det som 3 grupper med et visst antall i hver gruppe. Om vi så multipliserer dette første produktet med et hvilket som helst tall, si at vi multipliserer det med n, så kan vi representere det ved å ha n rader, der hver rad har 3 grupper med et visst antall i hver gruppe. Siden hver rad alltid har 3 grupper, og det er like mange i hver gruppe, så kan vi slå sammen hver kolonne til en ny større gruppe. Siden det er like mange grupper i hver av disse kolonnene, og like mye i hver av gruppene vil vi få 3 nye større grupper som alle inneholder like mye. Altså ser vi at dette også kan skrives som «3 · noe», så det er et tall i tregangen slik vi har definert det.

En annen måte å resonnere på er at man først har 3 poser med 5 kuler i hver pose. Når man skal legge til like mange (altså 3) nye poser med 5 kuler, kan man tømme innholdet i hver nye pose over i en eksisterende pose (multiplikasjon som gjentatt addisjon). Uansett hvor mange ganger (for eksempel 4 som i stad) man tømmer tre nye poser med 5 kuler over i hver sin eksisterende pose har man fortsatt 3 poser med like mange kuler i hver. Det totale antallet blir altså «3 · noe», som er et tall i tregangen slik vi har definert det.

Oppgave 2

a. Lag en kontekst til 376:5 og bruk konteksten til å finne svaret på divisjonsstykket. Alle steg i utregninga skal begrunnes ved bruk av konteksten.

En god besvarelse på denne oppgaven klarer tydelig å knytte den valgte konteksten til regnestykket 376:5 og bruker denne konteksten i sitt resonnement. Det må også komme tydelig frem hvordan man bruker konteksten til å avgjøre hva svaret på 376:5 er. Det er viktig at det som blir til overs i divisjonen blir behandlet på en måte som er fornuftig i den gitte konteksten. Det er mulig å lage både delingsdivisjonskontekster og målingsdivisjonskontekster.

Eksempel på delingsdivisjonskontekst kan være: 5 personer skal dele 376 drops. Hvor mange drops får hver person?

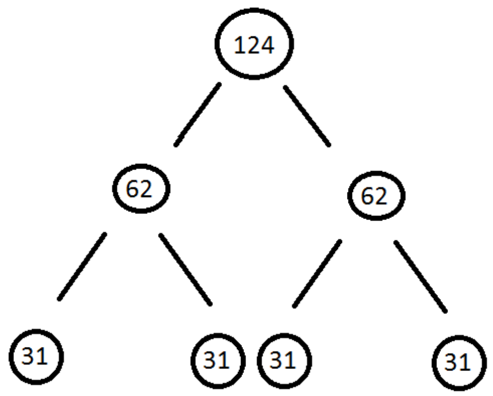
Eksempel på målingsdivisjonskontekst kan være: Vi har et langt tau på 376 meter. Vi ønsker å lage taustykker på 5 meter hver, hvor mange taustykker får vi?

b. En elev som jobber med divisjonstykket 124:4 har gjort følgende oppdagelse:

> «Om jeg regner ut 124:4 så får jeg 31, men om jeg regner ut først 124:2, som blir 62, og så 62:2 så blir det også 31.»

Finn en passende kontekst og bruk den til å vise at den sammenhengen eleven beskriver stemmer.

En god besvarelse her må illustrere i den valgte konteksten hvorfor det blir det samme å dele 124 på 4 og å dele 124 på 2 og så dele svaret på 2 igjen. Det er her ikke tilstrekkelig svar på oppgaven om det kun vises til at svaret i de to fremgangsmåtene blir like. En mulig kontekst kan her være å se på 124 kroner fordelt på 4 personer. Det blir det samme som om 124 kroner først fordeles likt på 2 par personer (hvert par får da 62 kroner), og så fordeles likt innad i hvert par. Resultatet er i begge tilfeller at 124 kroner har blitt fordelt likt på 4 personer.



c. Vi skal nå se litt videre på oppdagelsen fra b.
Regn i tillegg ut de følgende divisjonsstykkene:

$$330:3$$
$$110:2$$
$$330:6$$

$$345 : 3$$
$$115 : 5$$
$$345 : 15$$

Hvilke sammenhenger oppdager du? Formuler en hypotese ut fra dine oppdagelser. Gi et argument som viser at hypotesen din alltid er sann.

En god besvarelse vil her klare å formulere en tydelig hypotese. Et eksempel på en slik hypotese: «Dersom divisoren i et divisjonsstykke kan skrives som et produkt av to faktorer så kan vi finne svaret på divisjonsstykket ved å dividere dividenden med en av faktorene først, og så dividere kvotienten fra det divisjonsstykket med den andre faktoren.»

En god besvarelse vil også legge merke til at vi alt har startet på dette resonnementet i 2b, for vi ser at modellen i 2b er et tilfelle av dette der divisoren i $124 : 4$ kan skrives som $2 \cdot 2$. Om dividenden var et hvilket som helst antall kroner, og divisoren var et produkt av to vilkårlige faktorer (la oss si divisor $= a \cdot b$, dette kan vi tenke på som at pengene skal deles på a grupper personer, og det er b personer i hver gruppe). Det vil her ikke spille noen rolle om pengene blir fordelt likt på alle personene, eller om de først blir fordelt likt på hver gruppe og så fordelt likt på hver person i gruppene. Modellen vil se tilsvarende ut som i 2a, men det vil være a grupper på linje 2 og hver av de gruppene vil deles i b grupper, så det blir totalt $a \cdot b$ grupper på nederste linje.

(Dersom vi tenkte oss at vi først dividerte med b og så med a så ville det tilsvare at de b personene på en av gruppene først delte alle pengene, og så delte hver av de personene med en person fra hver gruppe etterpå.)

Oppgave 3

a. En gruppe elever arbeider med å sammenligne brøker. En elev sier at siden $\frac{3}{5}$ mangler 2 deler for å bli en hel mens $\frac{4}{9}$ mangler 5 deler så derfor må $\frac{3}{5}$ være størst. Hvordan vil du svare eleven?

En god besvarelse her vil påpeke at begrunnelsen til eleven er feil selv om konklusjonen er korrekt. Eleven teller opp antall deler som mangler for å bli en hel, men tar ikke hensyn til at størrelsene på delene er forskjellig i de to tilfellene og dette må tas opp i svaret til eleven. Svaret må også være slik at det kan bidra til å oppklare elevens misoppfatning.

b. Lag en kontekst til $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ og resonner deg fram til svaret ved å bruke konteksten.

Vi kan tenke mengdemodell, der vi har 12 elever i en klasse. På en tur hadde $\frac{2}{3}$ av alle elevene i klassen med seg varm drikke av et slag. $\frac{1}{2}$ av alle elevene i

klassen hadde med seg varm saft. Hvor stor del av klassen hadde med seg varm drikke som *ikke* var saft?
Det er her viktig å presisere at enheten for begge brøkene er den samme (alle elevene i klassen).

Av totalt 12 elever i klassen blir det 8 elever som har med varm drikke og 6 elever som har med varm saft:

(V har med varm drikke, K har med kald drikke, S har med varm saft)

V S   V S
V S   V S
V S   V S
V   V
K   K
K   K

Det er 2 elever som har med varm drikke, men som ikke har med varm saft. Det er altså 2 av 12, eller 1 av 6, som har med varm drikke som ikke er saft. Altså $\frac{1}{6}$ av elevene i klassen.

c. Resonner deg frem til svaret på $3 : \frac{2}{5}$ ved å ta utgangspunkt i en regnefortelling/kontekst.

Konteksten kan være at en har 3 liter saft som skal tømmes i glass som rommer $\frac{2}{5}$ liter. Hvor mange glass trenger vi? Gjentatt addisjon av $\frac{2}{5}$ viser at en etter 5 glass har brukt 2 liter. Da har vi 1 liter saft igjen. Om det trengs 5 glass for å bruke opp 2 liter trenger vi halvparten så mange for å bruke opp 1 liter, altså $2\frac{1}{2}$ glass. Så vi trenger $5 + 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ glass.

Vedlegg til eksamen LGU11004, 2. desember 2015

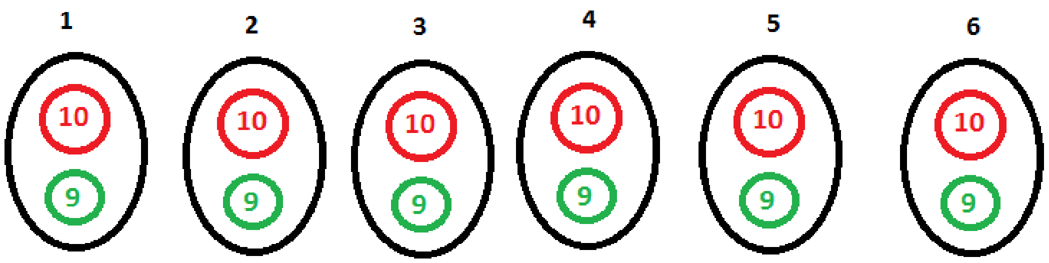
Dialog fra klasserommet til Mr. Crandall

Vi er i fjerdeklassen til Mr. Crandall. Han skriver $6 \cdot 19 = (6 \cdot 10) + (6 \cdot 9)$ på tavla. Han spør elevene om dette er sant eller usant, og ber dem tenke på tallene, ikke regne ut hva svaret blir. Etter litt tenketid utspiller følgende dialog seg:

1. Mr Crandall: Jeg hører mange sier at det er sant. Tror alle det er sant?
2. Elever: Ja!
3. Mr Crandall: Er det noen som ikke er sikker? Det er helt greit å ikke være sikker. Dersom du er en som ikke er sikker, kanskje det hjelper å høre på noen av medelevene dine. Vi prøver altså å forklare hvorfor denne tallsetningen er sann. Blir vi overbevist av forklaringene våre? La oss høre nøye på en person først, så kan andre prøve å bygge videre på det som blir sagt.
4. Janine: Du delte etter verdien på tallene.
5. Mr. Crandall: Takk for at du startet Janine, du sa at jeg delte etter verdien på tallene. Er det noen som kan bygge videre på det?
6. Louisa: Du vet det er sant, fordi at for 6 ganger 9-delen så tar du bort 10 og tar bare 9 der.
7. Mr. Crandall: Jeg tror jeg skjønner hva du mener, men er ikke helt sikker. Har denne ideen noe med verdien på sifrene i tallene å gjøre?
8. Louisa: Ja
9. Mr. Crandall: Kan du fortelle oss hvordan?
10. Louisa: Du gjør det om til flere stykker når du deler det opp etter verdien på tallene.
11. Mr. Crandall: Hvilket tall er det jeg deler opp?
12. Louisa: Du får 10 og 9 fra 19.
13. Mr. Crandall: Her er en viktig del av å gi en matematisk forklaring, et resonnement. (Peker på $6 \cdot 19$.) La oss se på hva denne delen betyr først. Hvem kan fortelle oss hva 6 ganger 19 betyr? Terrance, det ser ut som om du tenker på noe, har du noe å dele til resten av klassen?
14. Terrance: Jeg er ikke sikker enda
15. Mr. Crandall: Vil du si pass? Vil du spørre noen andre om de har noe å dele? (Terrance peker på Grace Marie.)
16. Grace Marie: Du tar et tall og så tar du det andre tallet og plusser det så mange ganger.
17. Mr. Crandall: Er det noen som kan si det med sine egne ord?
18. Nina: Grace Marie sa at du tar et tall og så tar du det andre tallet og plusser det så mange ganger. For eksempel, 6 ganger 19, du plusser sammen 6 nitten ganger.
19. Mr. Crandall: Ok, noen andre som har noen innspill?
20. Janine: Eller du kan plusse 19 seks ganger.
21. Mr. Crandall: Nå har vi to ideer. Er dere enige i begge disse forslagene? Vi kan legge sammen 6 nitten ganger, eller 19 seks ganger. Vi må velge en for arbeidet vårt i dag. (Elevene sier 19 seks ganger.)
22. Mr. Crandall: Ok, da velger vi denne. Så om $6 \cdot 19$ betyr seks grupper med 19 i hver, dere skal få litt tid til å tenke sammen med sidemannen nå. Vi snakket tidligere om at vi hadde delt opp tallene etter verdien på sifrene. Hvordan kan jeg sette ord på hva jeg gjør da? Seks grupper med 19 i hver er det samme som……. Prøv å si hva dette betyr da? (Peker på $(6 \cdot 10) + (6 \cdot 9)$ på tavla.)
23. Mr. Crandall: Jeg hører det er noen som sier at «Seks grupper med 19 i hver er det samme som 6 ganger 10 og 6 ganger 9». La meg utfordre dere litt, det er ikke den

setningen jeg vil høre. Jeg vil gjerne at vi holder oss til å snakke om «grupper av». Prøv litt videre, så ser vi hva dere finner ut av. (Noen minutter ventetid.)

24. Dominic: Seks grupper med 19 i hver er det samme som seks grupper med 10 i hver og 6 grupper med 9 i hver.
25. Mr. Crandall: Er det noen som kan gjenta hva Dominic nettopp sa? Jessica?
26. Jessica: Han sa at seks grupper med 19 i hver er det samme som seks grupper med 10 i hver og 6 grupper med 9 i hver.
27. Mr. Crandall: La oss se om vi kan tegne et bilde som kan hjelpe oss å forstå denne ideen. (Han tegner bildet under).



28. Mr. Crandall: La oss se om dette kan hjelpe. Er det noen som kan se hvor de seks gruppene er på dette bildet? Kan dere se hvor de seks tierene er og hvor de seks nierene er? Snakk sammen med sidemannen og fortell hvor du ser seks grupper med 10 i hver og seks grupper med 9 i hver. (Kort pause.) Så kan du fortelle sidemannen hvor du ser seks grupper med 19 i hver.
29. Mr. Crandall: Det vi gjør nå er å lage et matematisk resonnement. En forklaring. En forklaring på hvorfor denne tallsetningen, $6 \cdot 19 = (6 \cdot 10) + (6 \cdot 9)$, er sann. Hvordan kan vi bruke denne tegningen til å forklare det, George?
30. George (kommer opp til tavla og peker): Vi har seks grupper. I hver gruppe har vi 10 og i hver gruppe har vi også 9. Det er det samme som å ha 19 i hver gruppe. Så seks grupper med 10 i hver og seks grupper med 9 i hver er det samme som seks grupper med 19 i hver.
31. Mr. Crandall: Hvem kan gjenta det George nettopp sa? Camilla?
32. Camilla: Han sa at vi har seks grupper, og i hver gruppe så har vi en tier og en nier. Så det er det samme som å ha 19 i hver av gruppene våre.
33. Mr. Crandall: Er dere enige i det George og Camilla sier? Hvorfor er du enig Emilio?
34. Emilio: Jeg ser det på bildet, og så vet jeg at 10+9 er 19. Og vi har seks sånne. Seks grupper med 19 er egentlig det samme som seks grupper med 10 i hver og seks grupper med 9 i hver.
35. Mr. Crandall: Så, da har vi vist at seks grupper med 19 i hver er det samme som seks grupper med 10 i hver og seks grupper med 9 i hver. Og vi trengte ikke en gang å finne ut hvor mye $6 \cdot 19$ blir for å være sikker på at det ble det samme!

Dialog er hentet fra Kazemi & Hintz (2014). Vår oversetting av dialogen.

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). *Intentional Talk. How to structure and lead mathematical discussions.* Stenhouse Publishers.